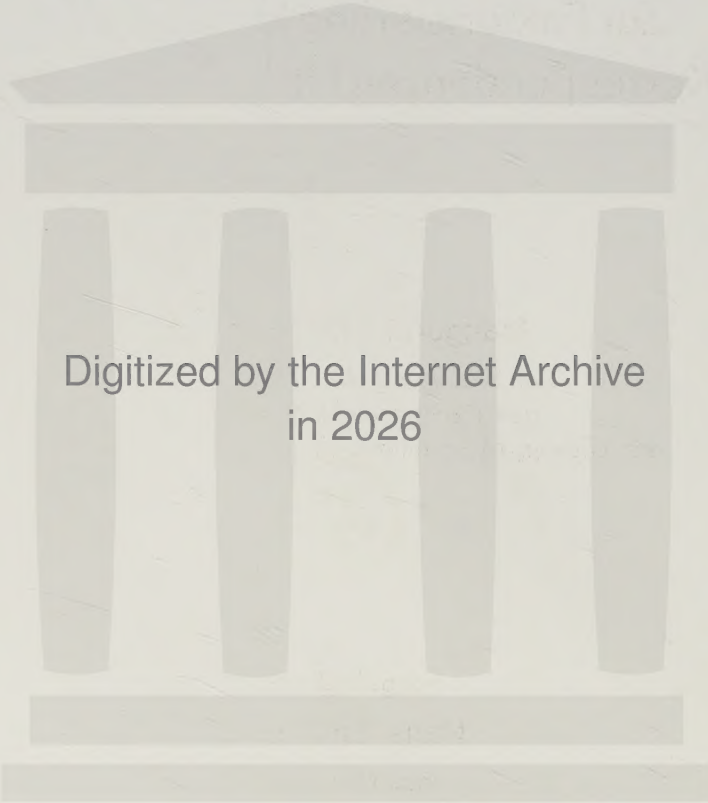


Zur Faktorisierung holomorpher
Korrespondenzen über Abbildungen

Hans Sinzinger

1976

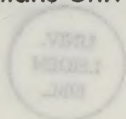


Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41554616_0083

Zur Faktorisierung holomorpher Korrespondenzen über Abbildungen

Inaugural - Dissertation
zur Erlangung der Doktorwürde
des Fachbereichs Mathematik
der Ludwig-Maximilians-Universität zu München



vorgelegt von
Hans Sinzinger
aus München

München, Juli 1975

Zur Faktorisierung holomorpher
Korrespondenzen über Abbildungen

Inaugural - Dissertation
zur Erlangung des Doktorgrades
des Fachbereichs Mathematik
der Ludwig-Maximilians-Universität zu München



1. Berichterstatter: Prof. Dr. K. Stein
2. Berichterstatter: Prof. Dr. K. Wolffhardt

Datum der mündlichen Prüfung: 23. Januar 1976

I N H A L T

Inhalt	I
Einleitung	II
Bezeichnungen	X
Kapitel 0 Korrespondenzen	1
§0 Korrespondenzen zwischen Mengen	1
§1 Korrespondenzen zwischen topo- logischen Räumen	6
§2 Korrespondenzen zwischen kom- plexen Räumen	10
§3 Meromorphe Abbildungen	16
Kapitel 1 Die symmetrische Potenz	20
§0 Konstruktion	21
§1 Topologisches	23
§2 Faktorisierung c-holomorpher Korrespondenzen	26
Kapitel 2 Die Chow-Varietät	32
§0 Die komplexe Mannigf. $\mathbb{P}_n$	34
§1 Der Satz von Chow	41
§2 Konstruktion (1)	49
§3 Konstruktion (2)	57
§4 Zerlegung c-holomorpher Korre- spondenzen	75
Anwendungen auf Fortsetzungsfragen	83
Literatur	89
Lebenslauf	92

Einleitung

Korrespondenzen, also mengenwertige Zuordnungen (in Verallgemeinerung der Abbildungen, die als eindeutige Zuordnungen definiert und als "einpunktige" Korrespondenzen aufzufassen sind) sind Objekte, die, außer in der algebr. Geometrie eigentlich erst aufgrund der Definition der meromorphen Abbildung nach R.REMMERT (s.u.) in der Funktionentheorie erhöhte Aufmerksamkeit genießen. Der Versuch, Korrespondenzen über Abbildungen zu faktorisieren resultiert u.a. aus dem Bestreben, Unbekanntes (Fragen über "holomorphe" Korrespondenzen) auf Bekanntes (Abbildungstheorie) in möglichst überschaubarer Weise zurückzuführen. Der Anspruch der Überschaubarkeit kann aber wohl wirklich nur in Spezialfällen, z.B. bei bestimmten Bildräumen oder unter einschränkenden Voraussetzungen an die Bilder der Korrespondenz erfüllt werden.

Korrespondenzen sind unter diesem Namen seit langem in der algebraischen Geometrie bekannt, wo sie insbesondere unter den italienischen Geometern F.SEVERI und F.ENRIQUES zu einem vielseitigen Werkzeug ausgebildet wurden. Sie werden dort durch algebraische Gleichungssysteme definiert, die die Punkte zweier algebraischer Varietäten miteinander in Relation setzen, indem sie eine Teilvarietät der Produktvarietät auszeichnen. Die Abhängigkeit der Bildmengen von den Punkten der Urbildvarietät konnte dann gedeutet

werden als Parametrisierung geometrischer Objekte durch eine oder mehrere Variablen, bekannt als Scharen, Punktgruppen, etc. Ein einfaches Beispiel für eine solche algebraische Korrespondenz ist die "Dualität" δ (vgl. Def. 2.2.1), bei der jedem Punkt eines projektiven Raumes seine duale Hyperebene zugeordnet wird.

In den Anfängen der Funktionentheorie wurde beim Prozeß der analytischen Fortsetzung gefunden, daß dieser i.a. nicht eindeutig ist, sondern (bei geeigneter Definition und in unserer Sprechweise) eine echte Korrespondenz definiert. Die vagen Ansätze, für solche "mehrdeutigen Funktionen" einen funktionentheoretischen Kalkül auszuarbeiten, wurden überflüssig gemacht durch die geniale Idee B. RIEMANNs, als Definitionsgebiet für die analytische Fortsetzung eines gegebenen Funktionselements eine eindimensionale komplexe Mannigfaltigkeit zu konstruieren, auf der diese als (eindeutige) holomorphe Funktion erklärt werden konnte (vgl. H. WEYL: Die Idee der Riemannschen Fläche, Leipzig 1913).

In der durch K. WEIERSTRASS um 1880 begründeten Funktionentheorie mehrerer Veränderlichen traten eine Reihe von Phänomenen auf, die im Eindimensionalen unbekannt waren. Z.B. existiert für das durch $\sqrt{z_1 \cdot z_2}$ gegebene Funktionselement keine dem ganzen $\mathbb{C}^2$ (Koordinaten z_1, z_2) überlagerte Mannigfaltigkeit, die als Definitionsgebiet für dessen analytische Fortsetzung gelten kann; $\sqrt{z_1 \cdot z_2}$ ist im Punkt $z_1 = z_2 = 0$ "nicht uniformisierbar". Da offenbar der Begriff der komplexen Mannigfaltigkeit zur Bewältigung sol-

cher Erscheinungen nicht ausreichte, waren stärkere Verallgemeinerungen des Begriffs der Riemannschen Fläche zu finden. Auf diese Weise kamen H.BEHNKE - K.STEIN 1951, H.CARTAN 1953 und J.P.SERRE 1955 zu ihren Definitionen für "komplexe Räume", die heute als normale bzw. reduzierte komplexe Räume bekannt sind, und mit den normalen kpl.R. war die "richtige" Verallgemeinerung der Riemannschen Flächen auf höhere Dimensionen gefunden.

Man stieß jedoch bei den meromorphen Funktionen, die lokal als Quotienten holomorpher Funktionen definiert sind, auf Mehrdeutigkeitsphänomene anderer Art, die in der Theorie einer Variablen unbekannt waren, wie z.B. bei der "Funktion" z_1/z_2 , die im Ursprung keinen bestimmten Wert annimmt. R.REMMERT (1956) hatte die Idee, meromorphe Funktionen und allgemeiner meromorphe Abbildungen als holomorphe Korrespondenzen zu definieren, die überall außerhalb einer dünnen analytischen Menge holomorphe Abbildungen (und in einem gewissen Sinn minimal) zu sein hatten (vgl. Kap.0 §3).

Da beim Umgehen mit so definierten meromorphen Abbildungen oft Korrespondenzen in betracht gezogen werden müssen, die keine meromorphen Abbildungen mehr sind, jedoch immer noch analytischen Graphen haben, wurde man dazu geführt, auch solche G-analytischen und insbesondere die c-holomorphen Korrespondenzen (Kap.0 §2) eigens zu untersuchen. Für Korrespondenzen hat sich in München die Schreibweise $k: X \multimap Y$ eingebürgert, die ausdrückt, daß

k eine mengenwertige Zuordnung zwischen (den Mengen, topologischen oder komplexen Räumen etc.) X und Y ist, definiert durch ihren Graphen $G_k \subset X \times Y$. Wichtig für das Studium der Korrespondenzen sind vor allem die Abbildungen

$\check{k}: G_k \rightarrow X$ und $\hat{k}: G_k \rightarrow Y$, die Beschränkungen der jeweiligen Projektionen. Ist $\check{k}$ eigentlich, so spricht man von c -stetigen (wenn G_k zudem analytisch ist, von c -holomorphen) Korrespondenzen. Meromorphe Abbildungen (Schreibweise $f: X \rightarrow Y$) sind dadurch charakterisiert, daß $\check{f}: G_f \rightarrow X$ eine eigentliche Modifikation (vgl. [11],[22]) des Urbildraums ist.

In der Funktionentheorie mehrerer Veränderlichen nehmen Fortsetzungsfragen einen breiten Raum ein. Auf G -analytische Korrespondenzen sind diesbezüglich die bekannten Fortsetzungsaussagen über analytische Mengen, wie z.B. das Singularitätentheorem von THULLEN-REMMERT-STEIN und andererseits die Sätze von W.ROTHSTEIN über Fortsetzung analytischer Mengen in "konkave Randpunkte" anwendbar. Man vergleiche hierzu die Arbeiten von K.STEIN [22,23,24,25] und D.HÖSS [12], in denen Fortsetzungsaussagen unter Voraussetzungen an die "Faserminimaldimension" abgeleitet wurden.

Der vorliegenden Arbeit lag der Versuch zugrunde, durch stärkere Betonung der Zuordnungseigenschaft der Korrespondenzen zu ähnlichen Fortsetzungsaussagen zu gelangen, in denen keine Voraussetzungen über die Faserdimension auftreten. Die Ansätze hierzu, bei denen dimensionserniedrigende Schnittbildungen im Bildraum eine große Rolle spielten,

ließen es geraten erscheinen, die folgende umfassendere und zunächst schwieriger erscheinende Fragestellung, wenigstens in Spezialfällen, anzugehen:

Gegeben ein komplexer Raum Y ; unter welchen Voraussetzungen gibt es einen komplexen Raum F_Y und eine c -holomorphe Korrespondenz $\lambda: F_Y \rightarrow Y$, sodaß jede c -holomorphe Korrespondenz $k: X \rightarrow Y$ über eine (holomorphe oder) meromorphe Abbildung $k': X \rightarrow F_Y$ faktorisiert ist ($k = \lambda \circ k'$)?

Heuristische Überlegungen aufgrund einfacher Beispiele ergaben, daß dergleichen für beliebige c -holomorphe Korrespondenzen nicht zu erwarten ist, wenn man sich von bestimmten Voraussetzungen (z.B. daß F_Y in gewisser Weise minimal und hausdorffsch sei, daß λ schöne Eigenschaften besitze) nicht lösen will. Vgl. Beisp. 2b auf S. 48 oder das einfachere Beispiel $G_k = \{o\} \times \mathbb{P} \cup \mathbb{C} \times \{1\} \subset \mathbb{C} \times \mathbb{P}$ für die charakteristischen Hindernisse. Als geeignete Zusatzbedingung zur Ausschaltung solcher Fälle erwies sich der Begriff der natürlichen c -holomorphen Korrespondenz (Def. 0.2.3), der unter dem Namen "kleinste holomorphe Korrespondenz" in [29] erstmalig definiert und eingehend untersucht wurde.

Bei beliebigem (aber reduziertem; vgl. sonst [14, 15]) Bildraum Y schien es angemessen, zunächst nur die Teilklasse der Korrespondenzen mit "fast überall" nulldimensionalen Bildern zu untersuchen. Denn zum einen gehören alle c -holomorphen Korrespondenzen in einen Steinschen Raum Y zu dieser Klasse; zum andern war zu hoffen, daß durch Schnittbildung mit Teil-

räumen von Y der nulldimensionale Fall stets herbeizuführen wäre.

In Kapitel 1 wird gezeigt, daß dieses eingeschränkte Problem eine Lösung besitzt; die Faktorisierungsräume F_Y sind sog. symmetrische Potenzen von Y (oder disj. Vereinigungen von solchen). Dazu wird benutzt, daß eine c -holomorphe Korrespondenz $k: X \multimap Y$ in der Umgebung gewisser Punkte $x \in X$, in denen $k(x)$ nulldimensional ist, in endlich viele holomorphe Abbildungen $f_1, \dots, f_q: U \rightarrow Y$ zerfällt, deren "symmetrische Verbindung" $\langle f_1, \dots, f_q \rangle: U \rightarrow Y^{(q)}$ zur Aussonderung der meromorphen Faktorisierungsabbildung $k': X \rightarrow Y^{(q)}$ aus der Korrespondenz $k^{(q)} = \langle k, \dots, k \rangle$ dient.

Das zweite Kapitel ist der Untersuchung c -holomorpher Korrespondenzen mit Bildraum $Y = \mathbb{P}_n$ (n -dim. proj. Raum) gewidmet, deren Bilder keiner Dimensionseinschränkung unterworfen sind. Bei der Suche nach einem geeigneten Faktorisierungsraum F_Y denkt man bei $Y = \mathbb{P}_n$ sogleich an die aus der algebraischen Geometrie bekannten Chow-Varietäten $Ch(r, q)$, die die rein r -dimensionalen (kompakten) analytischen Teilmengen der Ordnung q des $\mathbb{P}_n$ parametrisieren (darunter auch die Zyklen, die mit ihrer Vielfachheit die Ordnung q besitzen; diese treten in unseren Betrachtungen nicht explizit auf).

Um sie einer funktionentheoretischen Behandlung zugänglich zu machen, werden sie hier mit vorwiegend analytischen Methoden konstruiert (§3, nach den vorbereitenden §§0-2). In §3 wird mit denselben Methoden gezeigt, daß $Ch(r, q)$ ein ge-

eigneter Faktorisierungsraum für natürliche c-holomorphe Korrespondenzen mit Bildern der "allgemeinen" Dimension r und Ordnung q ist. Die Extraktion der meromorphen Faktorisierungsabbildung aus einer gewissen umfassenden Korrespondenz $(k_{r,q})$ vollzieht sich dabei in einiger Analogie zu Kap.1.

Erst in §4 kann durch Zerlegung von natürlichen Korrespondenzen in "reine" Bestandteile das Faktorisierungsproblem ganz ohne Voraussetzungen an die Bilder gelöst werden. Es wird aus den Chow-Varietäten ein komplexer Raum $Ch = Ch(\mathbb{P}_n)$ konstruiert, der zusammen mit der kanonischen Korrespondenz $\lambda: Ch \rightarrow \mathbb{P}_n$ die Faktorisierung jeder natürlichen c-holomorphen Korrespondenz $k: X \rightarrow \mathbb{P}_n$ über eine meromorphe Abbildung $k': X \rightarrow Ch$ ermöglicht.

Die Arbeit wird mit einem kurzen Abriß über Anwendungen der erhaltenen Resultate auf Fortsetzungsfragen abgeschlossen. In diesem wird unter Zugrundelegung eines einfachen Fortsetzungsbegriffs für meromorphe Abbildungen gezeigt, wann gewisse Klassen natürlicher c-holomorpher Korrespondenzen "zugleich" mit den meromorphen Funktionen fortgesetzt werden können. Für allgemeinere Aussagen bleibt eine vollständige Theorie der meromorphen Fortsetzung (insbesondere bei beliebigen Bildräumen) abzuwarten.

An dieser Stelle möchte ich allen danken, die mir im sachlichen oder ermunternden Gespräch Schwierigkeiten überwinden geholfen haben, besonders aber Herrn Prof. Dr. Karl Stein, der diese Arbeit angeregt und betreut hat, sowie

den Herren Prof.Dr.K.Wolffhardt, Prof.Dr.G.Fischer, Doz.Dr.
M.Schottenloher und Dr.G.Kraus. Herrn J.Maurer danke ich für
die Durchsicht des Manuskripts. Die Arbeit wurde mir durch
ein Stipendium nach dem Graduiertenförderungsgesetz ermög-
licht.

München, 12.7.1975

H.Sinzinger

Bezeichnungen

Die Bezeichnungen wurden in Übereinstimmung mit [1] und [2] gewählt, in Ausnahmefällen nach [27].

Die "Mengensubtraktion" ist erklärt durch $A \setminus B := \{x \in A: x \notin B\}$; das "Komplement" bzgl. eines offensichtlichen X von $B \subset X$ ist $\bar{B} := X \setminus B$.

$\text{id}_X: X \rightarrow X$ bezeichnet stets die identische Abbildung. Für Projektionen werden die Symbole pr oder π mit geeigneten Indizes benützt.

$\mathbb{N}^*$ sei die (geordnete) Menge der positiven ganzen Zahlen. $\mathbb{C}^*$ sei die Menge der komplexen Zahlen, $\mathbb{C}$, ohne die Null.

Wenn nichts anderes gesagt wird, handelt es sich in den folgenden Ausführungen stets um komplex-analytische Gebilde, auch wenn dies in der Symbolik nicht angedeutet ist. Z.B. bezeichnet $\mathbb{P}_n$ stets den komplex-projektiven Raum $\mathbb{P}_n(\mathbb{C})$; dagegen ist unter $\mathbb{P}^n = (\mathbb{P}_1)^n$ ein Produkt von n Zahlenkugeln zu verstehen.

Bezeichnungen und Ausdrücke, die in dieser Arbeit nicht eigens definiert worden sind, wurden nach Möglichkeit nur dort benutzt, wo sie in einer in der Nähe zitierten Arbeit erklärt sind.

Kapitel 0 Korrespondenzen

Da die Theorie der Korrespondenzen, insbesondere im Bereich der komplexen Analysis, verhältnismäßig neu ist, scheint es geraten, ihrer Entwicklung ein ganzes Kapitel zu widmen. Für manchen Beweis wird dabei der Kürze halber auf die Arbeiten von K. STEIN [22] und K. WOLFFHARDT [29] verwiesen. Die bisher modernste Darstellung des Gegenstandes findet sich in [25].

In §0 werden die grundlegenden mengentheoretischen Definitionen gegeben. §1 enthält Definitionen und die wichtigsten Sätze über stetige Korrespondenzen. §2 beschäftigt sich mit Korrespondenzen zwischen reduzierten komplexen Räumen (vgl. [1a] , für den nichtreduzierten Fall vgl. [14]). In §3 werden dann in knapper Darstellung die "meromorphen Abbildungen" als Spezialfall der "natürlichen c-holomorphen Korrespondenzen" eingeführt und ein Satz über das Enthaltensein einer meromorphen Abbildung in einer c-holomorphen Korrespondenz bewiesen.

§0 Korrespondenzen zwischen Mengen

Definition 0.0.1: Eine Korrespondenz ist ein Tripel (X, T, Y) , worin X , T , Y Mengen mit $T \subset X \times Y$ sind.

Ist $k = (X, T, Y)$, so schreiben wir $k: X \multimap Y$ und sagen, k sei eine Korrespondenz von X in (nach) Y mit dem Graph $Gk := G(k) := T$.

$k(x) := \{y \in Y: (x, y) \in Gk\}$, $x \in X$, sind die Bilder von k .

Für $A \subset X$ sei $k(A) := \bigcup \{k(x) : x \in A\}$.

////

Wir unterscheiden streng zwischen Abbildungen $\varphi: X \rightarrow \mathfrak{P}(Y)$ in die Potenzmenge von Y und Korrespondenzen $k: X \multimap Y$, auch wenn die Bilder von φ und k übereinstimmen. Es besteht folgender Zusammenhang:

Ist $\lambda: \mathfrak{P}(Y) \multimap Y$ die kanonische Korrespondenz mit dem Graph $G\lambda := \{(m, y) \in \mathfrak{P}(Y) \times Y : y \in m\}$, so findet man zur Abbildung φ die Korrespondenz $\lambda \circ \varphi$ (siehe Def. 0.0.2), deren Bilder mit denen von φ übereinstimmen. Andererseits existiert zu jeder Korrespondenz $k: X \multimap Y$ eine eindeutig bestimmte Abbildung $k': X \rightarrow \mathfrak{P}(Y)$ mit $k = \lambda \circ k'$. Die Menge $\{m \in \mathfrak{P}(Y) : \lambda(m) = k(x)\}$ ist nämlich einpunktig.

Eine Vorgabe von Bildern für eine Korrespondenz k notieren wir kurz durch $x \mapsto k(x)$, woraus dann der Graph $Gk = T$ vermöge $T := \{(x, y) \in X \times Y : y \in k(x)\}$ erhalten wird.

Ist I eine Indexmenge und $\forall i \in I: A_i \subset X$, so gilt $k(\bigcup_{i \in I} A_i) = \bigcup_{i \in I} k(A_i)$ und $k(\bigcap_{i \in I} A_i) \subset \bigcap_{i \in I} k(A_i)$. Es ist stets $k(\emptyset) = \emptyset$.

Definition 0.0.2: Ist $k: X \multimap Y$, so sei die Korrespondenz $k^{-1}: Y \multimap X$ festgesetzt durch ihren Graph $G(k^{-1}) := \{(y, x) \in Y \times X : (x, y) \in Gk\}$. k^{-1} heißt die zu k inverse (anderswo "konverse") Korrespondenz.

Ist $h: Y \multimap Z$ eine weitere Korrespondenz, so sei die Komposition (Verknüpfung) $h \circ k: X \multimap Z$ von h mit k (oder: h hinter k) erklärt vermöge der Zuordnung $x \mapsto h(k(x))$. ////

Die so erklärte Komposition ist assoziativ. Zusammen mit den Mengen als Objekten liegt eine Kategorie vor, in der die Identitäten gegeben sind durch die Korrespondenzen $\text{id}_X := (X, \Delta_X, X)$, wobei $\Delta_X := \{(x, x) \in X \times X: x \in X\}$ die Diagonale in $X \times X$ bedeute. Siehe dazu [3], [4], [15].

Insbesondere ist jede Abbildung $f: X \rightarrow Y$ eine Korrespondenz (X, G_f, Y) , $G_f := \{(x, f(x)) \in X \times Y: x \in X\}$. Das Bild von $x \in X$ unter dieser ist eine einpunktige Menge, die wir wieder mit $f(x)$ bezeichnen, ohne daß dies Verwirrung stiften wird.

Definition 0.0.3: Sei I eine Indexmenge und $k_i: X \multimap Y$, $i \in I$. Dann wird

$\bigcup_{i \in I} k_i: X \multimap Y$ durch $x \mapsto \bigcup_{i \in I} k_i(x)$, $x \in X$, und

$\bigcap_{i \in I} k_i: X \multimap Y$ durch $x \mapsto \bigcap_{i \in I} k_i(x)$, $x \in X$,

definiert. Entsprechend sind Ausdrücke der Gestalt

$k_1 \cup k_2 \cup \dots \cup k_n$ etc. zu verstehen.

Es werde $k_1 \subset k_2$ für $Gk_1 \subset Gk_2$ geschrieben. ////

Definition 0.0.4: Ist $k: X \multimap Y$, und sind π_X und π_Y

die Projektionen von $X \times Y$ nach X bzw. Y , so seien die k kanonisch zugeordneten Abbildungen

$$\check{k}: Gk \rightarrow X \quad \text{und} \quad \hat{k}: Gk \rightarrow Y$$

erklärt als $\check{k} := \pi_X|_{Gk}$ und $\hat{k} := \pi_Y|_{Gk}$. /////

Es gilt dann $k = \hat{k} \circ \check{k}^{-1}$ (Nach unserer Übereinkunft kann $\check{k}$ als Korrespondenz aufgefaßt werden, und es sei $\check{k}^{-1}$ deren Inverse.). Diese Zerlegung wird an manchen Stellen mit Vorteil zur Definition der Korrespondenzen und ihrer Eigenschaften herangezogen (vgl. [14]). Anschaulicher und für unsere Zwecke ausreichend (wir werden nur reduzierte komplexe Räume betrachten) ist die Definition über den Graphen Gk .

Definition 0.0.5: Ist $k: X \multimap Y$, so schreiben wir Voll k für $k^{-1}(Y)$ sowie Bild k für $k(X)$, wenn es mehr auf die Zuordnung k als auf X oder Y ankommt.

k heißt voll, wenn Voll k = X gilt, wenn also keines der Bilder von k leer ist. /////

k ist voll $\Leftrightarrow \check{k}$ ist surjektiv $\Leftrightarrow \text{id}_X \subset k^{-1} \circ k$.
Genau dann rührt k von einer Abbildung her (ist eine Abbildung), wenn $\check{k}$ bijektiv ist.

Definition 0.0.6: Ist $k: X \multimap Y$, $A \subset X$ und $B \subset Y$, so definieren wir Beschränkungen von k :

$$k|A|B : A \multimap B \quad \text{vermöge} \quad G(k|A|B) := Gk \cap (A \times B),$$

$k|A := k|A|Y$, die (vordere) Beschränkung von k auf A ,
 $k||B := k|X|B$, die hintere Beschränkung von k auf B .

Die konstante Korrespondenz C_A mit Bild A sei für beliebige Definitions- und Bildbereiche X bzw. Y mit $A \subset Y$ definiert durch $x \mapsto A$ für $x \in X$. $C_\emptyset$ heißt leere Korrespondenz. ////

Definition 0.0.7: Sei I eine Indexmenge und für $i \in I$ sei $k_i: X_i \multimap Y_i$, $h_i: X \multimap Y_i$. Dann setze man:

$\prod_{i \in I} k_i : \prod_{i \in I} X_i \multimap \prod_{i \in I} Y_i$ mit $x \mapsto \prod_{i \in I} k_i(x_i)$ für alle $x = (x_i ; i \in I) \in \prod_{i \in I} X_i$, sowie

$(h_i ; i \in I) : X \multimap \prod_{i \in I} Y_i$ mit $\xi \mapsto \prod_{i \in I} h_i(\xi)$ für alle $\xi \in X$.

$\prod_{i \in I} k_i$ heißt das kartesische Produkt der k_i , und

$(h_i ; i \in I)$ wird Verbindung der h_i genannt.

Im endlichen Fall, wo $I = \{1, \dots, n\}$ ist, schreiben wir resp.

$k_1 \times k_2 \times \dots \times k_n$ und $(h_1, h_2, \dots, h_n)$. ////

Bemerkung: Für die Projektion π_j auf die j -te Komponente ist nicht notwendig $\pi_j \circ (h_1, \dots, h_n) = h_j$, wie man aus Verbindungen ersehen kann, in denen die leere Korrespondenz vorkommt. Dasselbe gilt für das kartesische Produkt. Daher sind jene beiden Begriffe nicht im kategoriellen Sinn (vgl. [3]) zu verstehen.

Für das Studium von Eigenschaften des Graphen sehr nützlich ist das

Lemma 0.0.1: Seien f und g Korrespondenzen

$$X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z, \text{ so gilt}$$

$$G(g \circ f) = (f \times \text{id}_Z)^{-1}(Gg).$$

$$\begin{aligned} \text{Beweis: } (f \times \text{id}_Z)^{-1}(Gg) &= \{(x, z) \in X \times Z: f(x) \times \{z\} \cap Gg \neq \emptyset\} = \\ &= \{(x, z) \in X \times Z: \exists y \in Y: (f(x) \times \{z\}) \cap (\{y\} \times g(y)) \neq \emptyset\} = \\ &= \{(x, z) \in X \times Z: \exists y \in Y: y \in f(x) \wedge z \in g(y)\} = G(g \circ f). \end{aligned}$$

////

$G(g \circ f)$ hat übrigens auch die Darstellung $(f^{-1}, g)(Y)$.

§1 Korrespondenzen zwischen topologischen Räumen

Sind X und Y topologische Räume, so bedeutet das Zeichen $k: X \multimap Y$, daß k eine Korrespondenz zwischen den ihnen zugrundeliegenden Mengen ist.

Im Folgenden seien X, Y, X_i etc. stets topologische Räume[2].

Definition 0.1.1: Eine Korrespondenz $k: X \multimap Y$ heißt 'c-stetig' (oder schwach c-stetig [25]), wenn die Urbilder $k^{-1}(A)$ abgeschlossener Mengen A abgeschlossen sind.

k heißt c-stetig, wenn sie 'c-stetig' ist, und zudem alle Bilder $k(x)$ quasikompakt sind.

k heißt o-stetig, wenn die Urbilder offener Mengen offen sind. c-o-stetig, wenn k c- und o-stetig ist.

////

k ist genau dann 'c-stetig, wenn für alle x aus X und jede Umgebung V von $k(x)$ eine Umgebung U von x existiert, sodaß $k(U) \subset V$. Es ist dann Voll k abgeschlossen in X .

k ist genau dann o-stetig, wenn für alle x aus X und jede Umgebung V eines Punktes aus $k(x)$ eine Umgebung U von x existiert, für deren Punkte ξ gilt $k(\xi) \cap V \neq \emptyset$.

Solche Eigenschaften werden zur Definition lokaler Stetigkeitsbegriffe herangezogen.

Satz 0.1.1: $k: X \rightarrow Y$ ist genau dann c-stetig (o-stetig), wenn $\check{k}: G_k \rightarrow X$ eigentlich (bzw. offen) ist.

Beweis: Es sei auf [22] oder [29], für den geklammerten Teil auf [8] p. 65 verwiesen. ////

Korollar: Ist k c-stetig, so sind Bilder $k(Q)$ quasikom-
pakter Mengen Q quasikompakt.

Beweis: Ist Q quasikompakt in X , so ist $\check{k}^{-1}(Q)$ quasikompakt in G_k , weil $\check{k}$ eigentlich ist [2]. Also ist $\hat{k}(\check{k}^{-1}(Q)) = k(Q)$ quasikompakt in Y , weil $\hat{k}$ stetig ist. ////

Für Abbildungen fallen die Begriffe 'c-stetig, c-stetig und o-stetig zum üblichen Stetigkeitsbegriff zusammen.

Definition 0.1.2: Eine Korrespondenz $k: X \rightarrow Y$ heißt G-abgeschlossen (graphabgeschlossen), wenn der Graph G_k abgeschlossen in $X \times Y$ ist.

Die Korrespondenz $\bar{k}: X \multimap Y$, definiert durch

$G(\bar{k}) := \overline{Gk}$ (abgeschlossene Hülle in $X \times Y$), heißt
(topologischer) Abschluss von k . ////

Eine c-stetige Korrespondenz in einen Hausdorffraum ist stets G-abgeschlossen.

Satz 0.1.2: Seien $k, k_1: X \multimap Y$ Korrespondenzen, k G-abgeschlossen und k_1 c-stetig.

Dann ist $k \cap k_1: X \multimap Y$ c-stetig.

Beweis: $(k \cap k_1)^\vee$ ist Beschränkung der eigentlichen Abbildung $\check{k}_1$ auf die abgeschlossene Teilmenge $Gk \cap Gk_1$ von Gk_1 , also nach [2] selber eigentlich. (Satz 0.1.1). ////

Korollare:

a) Der Durchschnitt einer nichtleeren Familie c-stetiger G-abgeschlossener Korrespondenzen (z.B. c-stetiger Korrespondenzen in einen Hausdorffschen Bildraum) ist c-stetig.

b) Jede in einer c-stetigen enthaltene G-abgeschlossene Korrespondenz ist c-stetig.

c) Ist k in einer c-stetigen Korrespondenz enthalten, und ist der Bildraum Hausdorffsch, so ist $\bar{k}$ die kleinste c-stetige Korrespondenz, die k enthält.

d) Eine G-abgeschlossene Korrespondenz mit quasikompaktem Bildraum ist c-stetig.

Beweis: b) folgt trivial aus Satz 0.1.2. a) folgt aus b), da der Durchschnitt G-abgeschlossen und in einer c-stetigen Korrespondenz enthalten ist. (Man beachte, daß hier der "leere Durchschnitt" offenbar nicht zulässig ist.)
c) ist nach b) klar. (Bemerkung bei Def. 0.1.2). Im Fall von d) ist die konstante Korrespondenz, die den Bildraum als Bild hat c-stetig, und jede Korrespondenz ist in dieser enthalten. Also ist nach b) jede G-abgeschlossene K. c-stetig. ////

Direkt aus den Definitionen folgt, daß die Vereinigung endlich vieler c-stetiger (endlich vieler 'c-stetiger, beliebig vieler o-stetiger) Korrespondenzen c-stetig ('c-stetig, o-stetig) ist.

Definition 0.1.3: $k: X \rightarrow Y$ heiße (c-)eigentlich, wenn k und k^{-1} c-stetig sind. ////

k ist also genau dann eigentlich, wenn $\check{k}$ und $\hat{k}$ eigentliche Abbildungen sind. Ist k eigentlich, so sind Urbilder quasikompakter Mengen quasikompakt. Ist letzteres erfüllt, und sind X und Y lokalkompakt und k c-stetig, so ist k c-eigentlich. (Definition der eigentlichen Korrespondenz in [29]).

Satz 0.1.4: Die Komposition c-stetiger ('c-stetiger, o-stetiger, c-eigentlicher) Korrespondenzen ist c-stetig ('c-stetig, o-stetig, c-eigentlich).

Beweis: Nur für den Fall der c-stetigen K. ist etwas zu

zeigen, nämlich daß die Bilder der Komposition quasikompakt sind.
Dies folgt aus dem Korollar zu Satz 0.1.1 .

////

Satz 0.1.4: Kartesisches Produkt und Verbindung endlich vieler c -stetiger Korrespondenzen sind c -stetig.

Beweis: Der einfache Beweis hierfür findet sich etwa in [22] .

////

§2 Korrespondenzen zwischen komplexen Räumen.

Im Folgenden bezeichnen X , Y , X_1 , etc. ausschließlich reduzierte komplexe Räume [1a], [16]. Die Schreibweise $k: X \multimap Y$ bedeutet dann, daß k eine Korrespondenz zwischen den X und Y zugrundeliegenden Mengen ist. Der Fall der nichtreduzierten komplexen Räume wird in [14] behandelt.

Definition 0.2.1: $k: X \multimap Y$ heißt G-analytisch (graph-analytisch), wenn ihr Graph G_k eine analytische Teilmenge des Produktraumes $X \times Y$ ist.

k heißt c-holomorph (o-holomorph, c-o-holomorph), wenn k G-analytisch und c -stetig (o-stetig, c-o-stetig) ist. ////

Die Bilder $k(x)$ einer G-analytischen Korrespondenz sind analytische Mengen des Bildraumes.

Satz 0.2.1: Das Urbild einer analytischen Menge bei einer c-holomorphen Korrespondenz ist analytisch.

Beweis: Ist $A \subset Y$ analytisch, $k: X \rightarrow Y$ c-holomorph, so ist $k^{-1}(A) = \check{k}(G_k \cap (X \times A))$ das Bild einer analytischen Teilmenge von G_k bei der holomorphen und eigentlichen Abbildung $\check{k}: G_k \rightarrow X$, also nach dem REMMERTschen Abbildungssatz [19] analytisch. ////

Daraus folgt sogleich, daß das Bild einer analytischen Menge unter einer eigentlichen c-holomorphen Korrespondenz analytisch ist.

Satz 0.2.2: Kartesisches Produkt und Verbindung endlich vieler c-holomorpher Korrespondenzen sind c-holomorph.

Beweis: Wegen Satz 0.1.4 ist nur noch zu zeigen, daß die Graphen analytisch sind. Im Fall zweier c-holomorpher Korrespondenzen $k_1: X_1 \rightarrow Y_1$ ($i = 1, 2$) ist $G(k_1 \times k_2)$ das Bild von $G_{k_1} \times G_{k_2}$ unter der biholomorphen Vertauschungsabbildung $\psi: X_1 \times Y_1 \times X_2 \times Y_2 \rightarrow X_1 \times X_2 \times Y_1 \times Y_2$ und somit analytisch. Mit diesem Resultat über das kartesische Produkt folgt Satz 0.2.3, den wir verwenden, um den die Teilaussage über Verbindungen zu behandeln. Ist nämlich $X = X_1 = X_2$, und $i_\Delta: x \mapsto (x, x)$ die "Injektion der Diagonale", so gilt: $(k_1, k_2) = (k_1 \times k_2) \circ i_\Delta$ ist c-holomorph. ////

Satz 0.2.3: Die Komposition c-holomorpher Korrespondenzen ist c-holomorph.

Beweis: Mit den Bezeichnungen von Lemma 0.0.1 ist $G(g \circ f) = (f \times \text{id}_Z)^{-1}(Gg)$ (siehe dort). $f \times \text{id}_Z$ ist als kartesisches Produkt c-holomorpher Korrespondenzen c-holomorph, und Gg analytisch, also $G(g \circ f)$ nach Satz 0.2.1 ebenfalls analytisch. Nach Satz 0.1.3 ist $g \circ f$ c-stetig. ////

Zusatz: Aus diesem Beweis sieht man sofort:
Ist g G-analytisch und f c-holomorph, so ist $g \circ f$ G-analytisch.

Als einfache Folgerung aus Satz 0.1.2 und seinen Korollaren erhält man

Satz 0.2.4: Der Durchschnitt einer G-analytischen mit einer c-holomorphen ist c-holomorph, also auch der Durchschnitt beliebig vieler c-holomorpher Korrespondenzen.

Eine G-analytische Teilkorrespondenz einer c-holomorphen Korrespondenz ist c-holomorph, ebenso wie jede G-analytische Korrespondenz in einen kompakten komplexen Raum. ////

Ebenso einfach sieht man: Ist k in einer c-holomorphen Korrespondenz enthalten, so ist der Durchschnitt aller k umfassenden G-analytischen Korrespondenzen die kleinste k umfassende c-holomorphe Korrespondenz.

Die Vereinigung endlich vieler c-holomorpher (o-holomorpher) Korrespondenzen ist c-holomorph (o-holomorph).

Für das Folgende stellen wir einige bekannte Begriffe voran:

Eine analytische Menge A des komplexen Raumes X heiße dünn, wenn ihr Komplement in X dicht ist.

Dies ist genau dann der Fall, wenn A keine irreduzible Komponente von X enthält. Ist also X irreduzibel, und A nicht dünn in X , so ist $A = X$.

Der Identitätssatz für analytische Mengen lautet:

Sind A_1 und A_2 zwei analytische Mengen des komplexen Raumes X , und trifft die offene Menge $U \subset X$ jede irreduzible Komponente von A_1 , und gilt $A_1 \cap U \subset A_2 \cap U$,
so folgt $A_1 \subset A_2$.

Daher: Stimmen zwei irreduzible analytische Mengen auf einer offenen Menge nichttrivial überein, so sind sie gleich.

Definition 0.2.2: Eine G-analytische Korrespondenz heißt irreduzibel, wenn ihr Graph irreduzibel ist. ////

G-analytische Korrespondenzen zerfallen also in eindeutiger Weise in irreduzible Komponenten. Man hat, gleichsam als Kombination von Eigenschaften holomorpher Abbildungen und analytischer Mengen folgenden "Fast-Identitätssatz" [29]:

Satz 0.2.5: Sind $k_i: X \rightarrow Y$ ($i = 1, 2$) c-holomorphe Korrespondenzen, und ist U eine offene Menge, die jede irreduzible Komponente von X trifft, sodaß $k_1|_U = k_2|_U$ ist, dann gibt es eine dünne analytische Teilmenge Σ von X , sodaß $k_1|_{X \setminus \Sigma} = k_2|_{X \setminus \Sigma}$ gilt.

Ist k_1 irreduzibel, so folgt zudem $k_1 \subset k_2$. ////

Beweis: Man kann X als irreduzibel und somit U als nichtleer voraussetzen. Sei Σ_1 die Vereinigung der irreduziblen Komponenten von Gk_1 , die $U \times Y$ nicht treffen ($i = 1, 2$).

$\Sigma := \check{k}_1(\Sigma_1) \cup \check{k}_2(\Sigma_2)$ ist die gesuchte analytische Menge ($\check{k}_1$ ist eigentlich!). Sie ist dünn, denn andernfalls würde $\Sigma \cap U$ nichtleer, also für eine irreduzible Komponente g von $k_1 \cup k_2$ $Gg \cap (U \times Y)$ nichtleer sein, entgegen der Definition von Σ_1 .

Insbesondere folgt hieraus $g|_U \subset k_2|_U$, falls g irreduzible Komponente von k_1 war. Aus dem Identitätssatz für analytische Mengen folgt $g \subset k_2$, insgesamt also

$k_1|_{X \setminus \Sigma} \subset k_2|_{X \setminus \Sigma}$, und bei vertauschten Indizes die behauptete Gleichheit.

Die Inklusion $k_1 \subset k_2$ ist oben mitbewiesen. ////

Definition 0.2.3: Eine c-holomorphe Korrespondenz

$k: X \rightarrow Y$ heiße natürlich, wenn keine ihrer irreduziblen Komponenten unter $\check{k}$ ein dünnes Bild in X hat.

$\dot{k}$ bezeichne die Vereinigung all der irreduziblen Komponenten von k , die nicht dünnes Bild unter $\check{k}$ haben. ////

Satz 0.2.6: Sei $k: X \rightarrow Y$ c-holomorph.

Dann ist $\dot{k}$ c-holomorph und natürlich. $\dot{k}$ ist die kleinste c-holomorphe Korrespondenz, die mit k außerhalb einer dünnen analytischen Menge übereinstimmt.

k ist genau dann natürlich, wenn $k = \dot{k}$ ist.

Beweis: Der Kürze halber werde auf [29] verwiesen. ////

Satz 0.2.7: Für natürliche c-holomorphe Korrespondenzen

$k_1: X \rightarrow Y$ ($i = 1, 2$) gilt der Identitätssatz, d.h.:

Ist U eine offene Teilmenge von X , die jede irreduzible Komponente von X trifft, und gilt $k_1|U = k_2|U$ (bzw.

$k_1|U \subset k_2|U$), so ist bereits $k_1 = k_2$ (bzw. $k_1 \subset k_2$).

Beweis: Diese Aussage, die in einfacher Weise aus dem Identitätssatz für analytische Mengen folgt, ist z.B. in [29] zu finden. ////

Lemma 0.2.8: Ist $k: X \rightarrow Y$ eine natürliche c-holomorphe Korrespondenz des irreduziblen komplexen Raumes X , so besitzt k nur endlich viele irreduzible Komponenten.

Beweis: Die Annahme des Gegenteils führt wegen der Kompaktheit der Bilder $k(x)$ zu einer nicht lokalendlichen Zerlegung von k in irreduzible Komponenten. ////

§3 Meromorphe Abbildungen

Definition 0.3.1: Sei $\mu: X \rightarrow Y$ eine c-holomorphe Korrespondenz. $x \in X$ heißt ausgezeichneter Punkt in bezug auf μ , wenn es eine Umgebung U von x gibt, sodaß $\mu|U$ eine Abbildung ist. μ heißt meromorphe Abbildung von X in Y , in Zeichen $\mu: X \rightarrow Y$, wenn μ natürlich ist, und jede irreduzible Komponente von X einen ausgezeichneten Punkt in bezug auf μ enthält. $x \in X$ heißt außerwesentliche Singularität der meromorphen Abbildung μ , wenn für keine Umgebung U von x $\mu|U$ eine holomorphe Abbildung ist. Die Menge der außerwesentlichen Singularitäten von μ werde mit $S(\mu)$ bezeichnet. ////

Es seien hier die wichtigsten Aussagen über meromorphe Abbildungen zusammengestellt ($\mu: X \rightarrow Y$):

Nach [22] ist die Menge $S(\mu)$ eine dünne analytische Teilmenge von X . $S(\mu)$ kann ausgezeichnete Punkte in bezug auf μ enthalten, außer wenn X maximale Struktur [1] trägt. μ ist genau dann eine meromorphe Abbildung, wenn $\check{\mu}$ eine eigentliche Modifikationsabbildung ist (vgl. [22]).

Als natürliche c-holomorphe Korrespondenzen genügen auch die meromorphen Abbildungen dem Identitätssatz 0.2.7. Enthält also jede irreduzible Komponente von X einen ausgezeichneten Punkt in bezug auf die c-holomorphe Korrespondenz $k: X \rightarrow Y$, so enthält k genau eine meromorphe Abbildung (nämlich $\check{k}$, vgl. Def. 0.2.3).

Das kartesische Produkt (Def. 0.0.7) meromorpher Abbil-

dungen ist wieder meromorph [22]. Komposition, Beschränkung und Verbindung (Def. 0.0.2/5/7) meromorpher Abbildungen liefern zwar c-holomorphe Korrespondenzen, i.a. aber keine meromorphen Abbildungen. Die Verbindung zweier meromorpher Abbildungen μ_1, μ_2 besitzt genügend viele ausgezeichnete Punkte, sodaß sie genau eine meromorphe Abbildung enthält, die sog. meromorphe Verbindung $(\mu_1, \mu_2)^*$; sie ist assoziativ. Die Komposition meromorpher Abbildungen, $\mu_1 \circ \mu_2$, enthält immer dann genau eine meromorphe Abbildung, nämlich die meromorphe Komposition $\mu_1 \Delta \mu_2$, wenn die analytische Menge $\mu^{-1}(S(\mu_1))$ dünn in X ist. Entsprechendes gilt für die Beschränkung (Komposition mit der Injektion).

Satz 0.3.1: Seien $k: X \multimap Y$ eine c-holomorphe Korrespondenz des irreduziblen komplexen Raumes X , U ein irreduzibles Gebiet in X , und $f: U \rightarrow Y$ eine holomorphe Abbildung mit $f \subset k|U$. Weiter sei $g: X \multimap Y$ eine G-analytische Korrespondenz mit

$$f \not\subset g|U \quad \text{und} \quad k|U \subset f \cup (g|U).$$

Dann existiert genau eine meromorphe Abbildung $k_0: X \rightarrow Y$ mit $k_0 \subset k$ und $k_0|U = f$.

Beweis: Es seien $k_1, \dots, k_n$ die endlich vielen irreduziblen Komponenten von k (Def. 0.2.3/Lemma 0.2.8). Für alle $i = 1, \dots, n$ ist k_i voll.

a) Es gibt ein $i \in \{1, \dots, n\}$, sodaß $f \subset k_i|U$ ist:

Gf ist analytisch in $U \times Y$, weil f holomorph $U \rightarrow Y$ ist, und irreduzibel, weil $\tilde{f}: Gf \rightarrow U$ eine biholomorphe

*) S. Def. 0.2.3; andere Bezeichnungen in [22 - 25] und [29].

Abbildung und U irreduzibel ist. Gf ist daher in einer der irreduziblen Komponenten von $Gk \cap (U \times Y)$ enthalten, und sicher in keiner solchen, deren Bild unter pr_X dünn in X ist. Also gibt es ein $i \in \{1, \dots, n\}$, sodaß Gf in einer der irreduziblen Komponenten von $Gk_i \cap (U \times Y)$, also in Gk_i enthalten ist.

b) Es gibt keine zwei verschiedenen Komponenten k_i , die beide f enthalten: Angenommen $f \subset k_i|U$ (o.E. $i = 1, 2$). Aus der Voraussetzung $k|U \subset f \cup (g|U)$ folgt $Gk_i \cap (U \times Y) \subset Gf \cup (Gg \cap (U \times Y))$, daher gilt $Gk_i \cap ((U \times Y) \setminus Gg) \subset Gf \setminus Gg = Gf \cap ((U \times Y) \setminus Gg)$ ($i = 1, 2$).

Sei $U_0 := (U \times Y) \setminus Gg$. Aus der Annahme $f \subset k_i|U$ folgt $Gf \cap U_0 \subset Gk_i \cap U_0$, also Gleichheit ($i = 1, 2$). Aus der Voraussetzung $f \not\subset g$ folgt, daß $Gf \cap U_0$, also auch $Gk_i \cap U_0$ nicht leer ist, und da U_0 offen ist, folgt aus dem Identitätssatz für analytische Mengen $Gk_1 = Gk_2$. Sei k_0 die eindeutig bestimmte irreduzible Komponente von k mit $f \subset k_0|U$.

c) Es ist auch $k_0|U \subset f$: Sei dazu $U_1 := (U \times Y) \setminus Gf$ (U_1 ist offen in $X \times Y$). Aus der Voraussetzung $k|U \subset f \cup (g|U)$ folgt $U_1 \cap Gk_0 \subset U_1 \cap Gk \subset Gg \cap U_1$.

Wäre $U_1 \cap Gk_0$ nichtleer, so folgte hieraus $Gk_0 \subset Gg$ (Identitätssatz für analytische Mengen, k_0 irreduzibel), also $Gf \subset Gk_0 \subset Gg$, im Widerspruch zur Voraussetzung $f \not\subset g|U$ des Satzes. Also ist $U_1 \cap Gk_0 = \emptyset$, folglich $(Gk_0 \cap (U \times Y)) \setminus Gf = \emptyset$ und somit $k_0|U \subset f$.

d) k_0 ist eine meromorphe Abbildung: k_0 ist c-holomorph ($k_0 \subset k$) und natürlich, weil voll und irreduzibel

(s.o.), und X enthält einen ausgezeichneten Punkt in bezug auf k_0 , weil sogar $k_0|U = f$ ist. ////

Lemma 0.3.2: Seien X und Y komplexe Räume, I eine Indexmenge und X_i ($i \in I$) die irreduziblen Komponenten von X . Für $i \in I$ seien $f_i: X_i \rightarrow Y$ meromorphe Abbildungen.

Dann ist die durch $Gf := \bigcup_{i \in I} Gf_i$ ($Gf_i \subset X_i \times Y \subset X \times Y$) definierte Korrespondenz eine meromorphe Abbildung $X \rightarrow Y$.

Beweis: f ist c-holomorph: Die Überdeckung $\{X_i\}$ von X ist lokalendlich. Daher ist f lokal eine endliche Vereinigung c-holomorpher Korrespondenzen, also in der Umgebung eines jeden Punktes von X c-holomorph (§2).

Offenbar ist f natürlich. Sei $i \in I$, und Ω_i die Menge der Punkte von X_i , die keiner anderen Komponente X_j angehören. Ω_i ist dicht in X_i , und $f|_{\Omega_i} = f_i|_{\Omega_i}$. Daher enthält X_i die dichte Menge $\Omega_i \setminus S(f_i)$ von ausgezeichneten Punkten in bezug auf f . Also ist f eine meromorphe Abbildung. ////

Bemerkung: Diese Aussage ermöglicht es häufig, für irreduzible Urbildräume gewonnene Sätze (bzgl. meromorpher Abbildungen) in einfacher Weise auf den allgemeinen Fall auszudehnen, ja sie erübrigt manchmal dessen oft recht umständliche Formulierung (vgl. 0.3.1, 1.2.3, 2.3.14, 2.4.5).

Kapitel 1 Die symmetrische Potenz

In diesem Kapitel wird an den Begriff der q -ten symmetrischen Potenz ($q \in \mathbb{N}$) eines topologischen bzw. komplexen Raumes erinnert. Dazu wird die Menge der "ungeordneten q -Tupel" des betreffenden Raumes in kanonischer Weise mit der Struktur eines topologischen bzw. komplexen Raumes versehen, wie dies nach bekannten Sätzen möglich ist (vgl. H. CARTAN [6]).

In §0 sind die Definitionen und Existenzsätze zusammengestellt. §1 setzt sich mit topologischen Fragen auseinander. Insbesondere wird dort die Möglichkeit der Faktorisierung c -stetiger Korrespondenzen über stetige Abbildungen untersucht.

In §2 wird für gewisse Klassen von c -holomorphen Korrespondenzen eine meromorphe Faktorisierung über die symmetrische Potenz gezeigt. Der hierzu beschrittene Weg ist wesentlich einfacher als der des analogen in Kapitel 2 , und kann wegen der prinzipiellen Gleichartigkeit der Verfahren für diesen als Modell dienen.

§0 Konstruktion der symmetrischen Potenz

Es sei Y ein Hausdorffscher topologischer Raum, und $q \geq 1$ eine natürliche Zahl. $Y^q := Y \times \dots \times Y$ sei das q -fache Produkt von Y mit sich (die q -te Potenz von Y), und $\pi_i: Y^q \rightarrow Y$ ($i = 1, \dots, q$) seien die Projektionen auf die einzelnen Faktoren.

Auf Y^q operiert die symmetrische Gruppe $\mathfrak{S}_q$ (von links) in der Weise $\sigma: (y_1, \dots, y_q) \mapsto (y_{\sigma 1}, \dots, y_{\sigma q})$, $\sigma \in \mathfrak{S}_q$. Diese Operation ist eigentlich und diskontinuierlich (vgl. [6]).

Die durch die Gruppenoperation definierte Äquivalenzrelation werde mit $\sim$ bezeichnet, und mit $Y^{(q)}$ der (topologische) Quotientenraum $Y^q / \sim$. $p: Y^q \rightarrow Y^{(q)}$ sei die Projektionsabbildung. Sie ist eigentlich und diskret.

Definition 1.0.1 Der auf die eben beschriebene Weise gebildete topologische Raum $Y^{(q)}$ heißt die q -te symmetrische Potenz von Y .

Ist $(y_1, \dots, y_q) \in Y^q$, so sei definiert:
 $\langle y_1, \dots, y_q \rangle := p(y_1, \dots, y_q)$, und es sei
 $Y^{(=q)} := \{ \langle y_1, \dots, y_q \rangle \in Y^{(q)} : y_i \neq y_k, 1 \leq i < k \leq q \}$.
 ($Y^{(=q)}$ ist das Komplement der Vereinigung der "Diagonalen und Nebendiagonalen" von $Y^{(q)}$, und über $Y^{(=q)}$ ist die Überlagerung p unverzweigt.)

Für Korrespondenzen $f_i: X \multimap Y$ ($i = 1, \dots, q$) werde
 $\langle f_1, \dots, f_q \rangle: X \multimap Y^{(q)}$ durch $\langle f_1, \dots, f_q \rangle :=$
 $= p \circ (f_1, \dots, f_q)$ festgesetzt.

$\lambda: Y^{(q)} \multimap Y$ sei die kanonische Korrespondenz

$$\langle y_1, \dots, y_q \rangle \multimap \{y_1, \dots, y_q\} \quad \text{////}$$

Y bezeichne nun des weiteren einen (wie immer reduzierten)
 komplexen Raum. Derselbe Buchstabe bezeichne aber auch den
 (Hausdorffschen) topologischen Raum, der diesem zugrundeliegt.

Satz 1.0.1: Sei Y ein komplexer Raum und $q \geq 1$ eine
 natürliche Zahl. Dann ist auf der q -ten symmetrischen Potenz
 $Y^{(q)}$ des zugrundeliegenden topologischen Raumes eine kom-
 plexe Struktur gegeben, die durch folgende Bedingungen charak-
 terisiert und eindeutig festgelegt ist:

- 1) Die Abbildung $p: Y^q \rightarrow Y^{(q)}$ ist holomorph.
- 2) Ist Z ein weiterer komplexer Raum, und
 $s: Y^q \rightarrow Z$ eine symmetrische (d.h. $\mathfrak{S}_q$ -invariante) holomor-
 phe Abbildung, so existiert genau eine holomorphe Abbildung
 $\tilde{s}: Y^{(q)} \rightarrow Z$ mit $s = \tilde{s} \circ p$.

Außerdem ist $\lambda: Y^{(q)} \multimap Y$ c-o-holomorph.

Beweis: Durch die oben gegebene Definition der Wirkung
 von $\mathfrak{S}_q$ wird diese zu einer eigentlich und diskontinuierlich
 operierenden Gruppe holomorpher Automorphismen von Y^q , und
 es folgt nun aus einem wesentlich allgemeineren Theorem in [5],

daß der Quotientenraum $Y^{(q)} = Y^q / \sim$ die Struktur eines komplexen Raumes trägt, die durch die Eigenschaften 1) und 2) eindeutig festliegt.

p ist nach der Definition der Quotiententopologie offen. Die Korrespondenz $\pi: \bigcup_{i=1}^q \pi_i : Y^q \rightarrow Y$ (s. Def.) ist als endlich Vereinigung der c-o-holomorphen "Korrespondenzen" π_i c-o-holomorph. Nun ist $\lambda = \pi \circ p^{-1}$, und p^{-1} ist c-o-holomorph, weil p eine offene eigentliche holomorphe Abbildung ist. Also ist λ nach Satz 0.2.3 (mit 0.1.4) c-o-holomorph. ////

Im Folgenden denke man sich $Y^{(q)}$ stets mit dieser Struktur versehen.

§1 Topologisches

Wir sehen in diesem Paragraphen von einer komplexen Struktur ab und betrachten Y als Hausdorffschen topologischen Raum.

Es sei für alle natürlichen Zahlen n die Menge $\mathbb{P}_n(Y) := \{Q \in \mathbb{P}(Y) : \text{card } Q \leq n\}$ eingeführt. Man hat eine kanonische Korrespondenz $L: \mathbb{P}(Y) \rightarrow Y$ ($Q \mapsto Q$; dieselbe wurde in Kap. 0, §0 λ genannt).

Die Vietoris-Topologie (vgl. [8] p. 78f) ist definiert als die größte Topologie auf $\mathbb{P}(Y)$, die L c-o-stetig macht. Man weiß, daß zu jeder c-o-stetigen Korrespondenz $k: X \rightarrow Y$ (X ein bel. top. Raum) eine stetige Abbildung $k': X \rightarrow \mathbb{P}(Y)$

existiert, die (in der Vietoris-Topologie) stetig ist, und für die $k = L \circ k'$ gilt.

Nun ist $\lambda: Y^{(q)} \rightarrow Y$ c-o-stetig. Sei also $\lambda': Y^{(q)} \rightarrow \mathbb{P}(Y)$ die zugehörige stetige Abbildung mit $L \circ \lambda' = \lambda$. λ' induziert eine stetige Bijektion $\lambda_q: Y^{(=q)} \rightarrow \mathbb{P}_q(Y) \setminus \mathbb{P}_{q-1}(Y)$, wo $Y^{(=q)} := \{ \langle y_1, \dots, y_q \rangle : 1 \leq i < j \leq q \Rightarrow y_i \neq y_j \}$ sei.

Daß deren Inverse ebenfalls stetig, daß also $Y^{(=q)}$ und $\mathbb{P}_q(Y) \setminus \mathbb{P}_{q-1}(Y)$ in natürlicher Weise homöomorph (bezüglich der Vietoris-Topologie) ist, zeigt folgender, auf die c-o-stetige Korrespondenz $L|_{\mathbb{P}_q(Y) \setminus \mathbb{P}_{q-1}(Y)}$ angewandeter

Satz 1.1.1: Seien X ein beliebiger und Y ein Hausdorffscher topologischer Raum, $q \in \mathbb{N}$, und $k: X \rightarrow Y$ eine o-stetige Korrespondenz mit ausschließlich q-punktigen Bildern.

Dann ist k auch c-stetig, und es gibt eine stetige Abbildung $k': X \rightarrow Y^{(q)}$ mit $k = \lambda \circ k'$.

Beweis: Da $\text{card } k(x) = q$ ist, kann man mit $k(x) = \{y_1, \dots, y_q\}$ eindeutig $k'(x) := \langle y_1, \dots, y_q \rangle$ definieren, und es bleibt zu zeigen, daß die so konstruierte Abbildung k' stetig ist.

Dazu sei V eine Umgebung von $k'(x) = \langle y_1, \dots, y_q \rangle$, die wegen der Stetigkeit von p (vgl. §0) und der Hausdorffeigenschaft von Y so gewählt werden kann, daß $V = p(V_1 \times \dots \times V_q)$ mit paarw.disj. Umgebungen V_i von y_i ($i = 1, \dots, q$). Da für alle $i = 1, \dots, q$ $k(x) \cap V_i \neq \emptyset$ ist, folgt aus der o-Ste-

tigkeit von k , daß eine Umgebung U von x existiert, so daß für alle $i = 1, \dots, q$ und alle $\xi \in U$ $k(\xi) \cap V_i \neq \emptyset$ ist.

Wir setzen nun $k^{(q)} := \langle k, \dots, k \rangle$ (vgl. Def. 1.0.1). Dann bedeutet die eben abgeleitete Beziehung, daß für alle $\xi \in U$ $k^{(q)}(\xi) \cap V \neq \emptyset$ gilt. Da wegen $\text{card } k(\xi) = q$ folgt $k^{(q)}(\xi) \cap Y^{(=q)} = \{k'(\xi)\}$, und weil, da die V_i paarw. disj. sind, $V \subset Y^{(=q)}$ ist, folgt $k'(\xi) \in V$, was die Stetigkeit von k' zeigt.

Da λ c -stetig ist, folgt aus der Gleichung $k = \lambda \circ k'$ und Satz 0.1.4, daß auch k c -stetig ist. ////

Bemerkungen:

1) Es sei D eine dreipunktige Menge, etwa $D = \{1, 2, 3\}$, versehen mit der *größten* Topologie, die $\{1, 2\}$ zu einer offenen Menge macht. Die Korrespondenz $k: \mathbb{R} \multimap D$ sei wie folgt erklärt: $0 \neq x \mapsto \{2, 3\}$, $0 \mapsto \{1, 2\}$. k erfüllt alle Voraussetzungen von Satz 1.1.1 (nur: der Bildraum ist nicht Hausdorffsch), die entsprechende Abbildung $k': \mathbb{R} \rightarrow D^{(2)}$ ist aber unstetig. Dies zeigt, daß die Voraussetzung an den Bildraum wesentlich ist.

2) Wenn k c -stetig ist, ist vermutlich die Bedingung an den Bildraum überflüssig.

3) Ein Beispiel dafür, daß auch für c -o-stetige Korrespondenzen die Voraussetzung der Konstanz der Kardinalzahl nicht abgeschwächt werden kann, ist folgendes:

Sei $k: [0,2] \rightarrow \mathbb{R}$ definiert durch

$k(t) := [0, t + 1, 2]$ für $0 \leq t \leq 1$ und

$k(t) := [0, t - 1, 2]$ für $1 \leq t \leq 2$.

k ist c-o-stetig, doch ist die nach Satz 1.1.1 aus $k|_{[0,2] \setminus \{1\}}$ gewonnene stetige Abbildung

$k': [0,2] \setminus \{1\} \rightarrow \mathbb{R}^{(3)}$ auf keine Weise stetig nach $[0,2]$ fortsetzbar, da $\langle 0,2,2 \rangle \neq \langle 0,0,2 \rangle$ ist.

4) Ein einfacheres, anders gelagertes Beispiel hierfür ist die (nur o-stetige) Korrespondenz $k: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ mit $0 \neq z \mapsto 1/z$ und $0 \mapsto \emptyset$. Sie gestattet trivialerweise keine Faktorisierung über eine Abbildung in $\mathbb{C}^{(1)}$.

5) Eine Korrespondenz k , die den Voraussetzungen des obigen Satzes genügt, zerfällt lokal in stetige Abbildungen. (Zeige eine solche Zerfällung für $\lambda|_Y (=q)$ und wende das Ergebnis auf k' an!).

§2 Faktorisierung c-holomorpher Korrespondenzen

Es sind nun $X, Y \dots$ wieder komplexe Räume. Man hat

Satz 1.2.1: Sei $k: X \rightarrow Y$ eine c-holomorphe Korrespondenz des irreduziblen komplexen Raumes X , und $x \in X$ ein Punkt mit $\text{card } k(x) < \infty$. Dann gibt es eine nichtleere offene Menge $U \subset X$, eine natürliche Zahl q (evtl. $q = 0$), und holomorphe Abbildungen $f_1, \dots, f_q: U \rightarrow Y$ mit $k|_U = \bigcup_{i=1}^q f_i$.

Beweis: 1) k werde zunächst als irreduzibel angenommen. Ist Bild $\check{k}$ dünn in X , so gilt der Satz mit $q = 0$ und $U = \emptyset$. Andernfalls ist $\text{Bild } \check{k} = X$ (X irreduzibel), und $\check{k}$ ist eine eigentliche surjektive holomorphe Abbildung $G_k \rightarrow X$, wobei G_k ein irreduzibler komplexer Raum ist. Die Faser von $\check{k}$ über x ist endlich (wegen Satz 2.0.3 gilt dies für eine ganze Umgebung von x). Ein bekanntes Resultat aus Sätzen über endliche holomorphe Abbildungen besagt dann, daß $\check{k}$ außerhalb einer dünnen analytischen Menge den Raum X endlich (unverzweigt) überlagert; sei q die Anzahl der Blätter dieser Überlagerung. Es existiert also ein nichtleeres Gebiet $U \subset X$ derart, daß $\check{k}^{-1}(U)$ in q verschiedene Zusammenhangskomponenten $U_i \subset G_k$ zerfällt, die vermöge der Abbildungen $\check{k}|_{U_i}$ jeweils biholomorph auf U bezogen sind.

Mit der Definition $f_i := \hat{k} \circ (\check{k}|_{U_i})^{-1}$ ($i = 1, \dots, q$) sind q holomorphe Abbildungen angegeben, die die Gleichheit $\bigcup f_i = k|_U$ erfüllen.

2) Im allgemeinen Fall einer reduziblen Korrespondenz k kann man sich durch Übergang zu $\check{k}$ auf natürliche Korrespondenzen beschränken (s. Def. 0.2.3; die "störenden" Komponenten liegen über einer dünnen analytischen Teilmenge von X).

Eine solche zerfällt in endlich viele irreduzible Komponenten. Diese haben zu je zweien einen Durchschnitt, dessen Bild unter $\check{k}$ eine dünne analytische Menge in X ist. (Der Beweis dieser Tatsache kann über lokale Zerlegungen jeder irreduziblen Komponente von k in holomorphe Abbildungen geführt

werden. Dazu wird benutzt, daß die Menge der Punkte, in deren Umgebung eine solche Zerlegung möglich ist in X dicht liegt.)

Sei W das Komplement der Vereinigung der eben konstruierten analytischen Teilmengen von X . W ist offen und dicht in X . $k|_W$ zerfällt nun in disjunkte irreduzible Komponenten, auf welche jeweils Teil 1 des Beweises angewendet werden kann. (Vgl. die obige Bemerkung!).

////

Bemerkung: Man entnimmt dem Beweis, daß die Menge der $x \in X$, in denen $\text{card } k(x) = q$ gilt, dicht ist in X .

1.2.2 Lemma: Ist $k: X \multimap Y$ eine c-holomorphe Korrespondenz, so ist auch die Korrespondenz

$$k^{(q)} := \langle k, \dots, k \rangle: X \multimap Y^{(q)}$$

für alle natürlichen Zahlen q c-holomorph.

Beweis: Mit Def. 1.0.1 ist $\langle k, \dots, k \rangle = p \circ (k, \dots, k)$, so-
daß das Lemma aus den Sätzen 0.2.2/3 folgt.

////

Damit können wir die Hauptaussage dieses Kapitels beweisen:

Satz 1.2.3: Ist $k: X \multimap Y$ eine natürliche c-holomorphe Korrespondenz des irreduziblen komplexen Raumes X , und ist für ein $x \in X$ $k(x)$ 0-dimensional,

dann gibt es eine natürliche Zahl q und eine meromorphe Abbildung $k': X \rightarrow Y^{(q)}$, die durch die folgenden Bedingungen eindeutig bestimmt sind:

$$1) \quad \lambda \circ k' = k ,$$

2) es gibt eine offene dichte Menge $X' \subset X$, sodaß
 $k'(X') \subset Y^{(=q)}$.

Beweis: Man kann vermöge Satz 0.3.1 k' aus der c-holo-
 morphen Korrespondenz $k^{(q)}$ gewinnen:

Wegen Satz 1.2.1 gibt es eine nichtleere offene Menge
 $U \subset X$ und $q \in \mathbb{N}$, sodaß $k|_U = \cup f_i$ ist für gewisse holo-
 morphie Abbildungen $f_1, \dots, f_q: U \rightarrow Y$. Die Abbildung
 $f := \langle f_1, \dots, f_q \rangle: U \rightarrow Y^{(q)}$ ist holomorph (vgl. Beweis
 Lemma 1.2.2) und erfüllt $f \subset k^{(q)}|_U$. U kann man irredu-
 zibel wählen, sodaß gleichzeitig $f(U) \subset Y^{(=q)}$ ist (vgl.
 Bemerkung zu Satz 1.2.1).

$\Delta := \{ \langle y_1, \dots, y_q \rangle \in Y^{(q)} : \exists i \neq j: y_i = y_j \} = Y^{(q)} \setminus Y^{(=q)}$
 ist offenbar eine analytische Menge in $Y^{(q)}$. Setzt man
 nun für die in Satz 0.3.1 auftretende G-analytische Korre-
 spondenz g die konstante C_Δ mit Bild Δ ein, so gilt
 die dort geforderte Beziehung $f \not\subset g$.

Weiter gilt $k^{(q)}|_U \subset f \cup g|_U$: Denn für $x \in U$ ist
 $k(x) = \cup f_i(x)$, also gilt für ein $\langle a_1, \dots, a_q \rangle \in k^{(q)}(x)$,
 das nicht in $\Delta = g(x)$ liegt, daß alle a_i paarweise ver-
 schieden sind, und es folgt $\langle a_1, \dots, a_q \rangle = \langle f_1(x), \dots, f_q(x) \rangle =$
 $= f(x)$.

Unter diesen Umständen folgt nun aus Satz 0.3.1 die Exi-
 stenz einer meromorphen Abbildung $k': X \dashrightarrow Y^{(q)}$ mit
 $k' \subset k^{(q)}$ und $k'|_U = f$. Anwenden von λ ergibt

$\lambda \circ k' | U = \lambda \circ f = k | U$, und somit folgt aus dem Identitätssatz
 0.2.7 $k \subset \lambda \circ k'$. $k \supset \lambda \circ k'$ folgt aus $k' \subset k^{(q)}$ und
 $k = \lambda \circ k^{(q)}$.

Die Zahl q ist durch Punkt 2 eindeutig festgelegt, und
 die Einzigkeit von k' folgt aus dem Identitätssatz für
 meromorphe Abbildungen und $k' | U = f$. X' ist gegeben
 durch das Komplement der dünnen analytischen Menge $k'^{-1}(\Delta)$.
 ////

Korollar: Ist $k: X \rightarrow Y$ eine c -holomorphe Korrespon-
 denz des irreduziblen komplexen Raumes X , und ist für ein
 $x \in X$ $k(x)$ 0-dimensional, so gibt es eine natürliche
 Zahl q und eine meromorphe Abbildung $k^*: X \rightarrow Y^{(q)}$ mit
 $\lambda \circ k^* = k$. (Der Fall $q = 0$ ist erfaßt durch die Defini-
 tion $Y^{(0)} := \{\cdot\}$ und $\lambda(\cdot) := \emptyset$.)
 ////

Man möchte nun wissen, wann die so erhaltene meromorphe
 Abbildung k' sogar holomorphe Abbildung ist. Da λ o -stetig
 ist, muß $k = \lambda \circ k'$ notwendig o -stetig sein. Eine
 hinreichende Bedingung gibt folgender

Satz 1.2.4: Sei X ein komplexer Raum mit maximaler
 Struktur (vgl. [1a]) und $k: X \rightarrow Y$ eine o -holomorphe
 Korrespondenz derart, daß für eine natürliche Zahl q und
 alle $x \in X$ gilt $\text{card } k(x) = q$.

Dann ist k c - o -holomorph, und es gibt genau eine holo-
 morphie Abbildung $k': X \rightarrow Y^{(q)}$ mit $k = \lambda \circ k'$.

Beweis: Da unter diesen Voraussetzungen nach Satz 1.1.1 bereits eine eindeutig bestimmte stetige Abbildung $k': X \rightarrow Y^{(q)}$ mit $k = \lambda \circ k'$ existiert, bleibt nur noch zu zeigen, daß sie holomorph ist. Es ist bekannt (vgl. [1b]), daß eine stetige Abbildung eines komplexen Raumes maximaler Struktur bereits dann holomorph ist, wenn ihr Graph analytisch ist. Aus Satz 1.1.1 entnehmen wir, daß k' stetig ist. Weiterhin ist nach Lemma 1.2.2 $k^{(q)}$ insbesondere G-analytisch. Da $\text{Bild } k' \subset Y^{(=q)}$ gilt, ist $Gk' = Gk^{(q)} \cap (X \times Y^{(=q)})$ lokalanalytisch in $X \times Y^{(q)}$. Als Graph einer c-stetigen Korrespondenz in einen Hausdorffraum ist Gk' abgeschlossen, also analytisch. ////

Bemerkungen: 1) Wie einfache Beispiele zeigen, ist die Voraussetzung an die Struktur von X notwendig.

2) Es sei die Situation von Satz 1.2.3 gegeben und X mit maximaler Struktur vorausgesetzt. Dann ist k' genau dann eine holomorphe Abbildung, wenn sie eine Abbildung ist. Letzteres ist aber selbst unter der Voraussetzung $\text{card } k(x) \equiv q$ i.a. nur dann richtig, wenn X normal ist.

3) Satz 1.2.3 läßt sich mittels Lemma 0.3.2 leicht auf reduzible X verallgemeinern. Als Faktorisierungsraum ist dann die disjunkte Vereinigung $Y^{(\cdot)}$ aller symmetrischen Potenzen von Y zu wählen, und $\lambda: Y^{(\cdot)} \rightarrow Y$ durch die Beschränkungen auf die $Y^{(q)}$ zu definieren.

Kapitel 2 Die Chow - Varietät

Das vorhergehende Kapitel hat gezeigt, daß für endlichpunktige holomorphe Korrespondenzen eine symmetrische Potenz des Bildraumes der geeignete Faktorisierungsraum ist. Die analoge Rolle für holomorphe Korrespondenzen k mit Bildraum $\mathbb{P}_n$ spielen die Chow-Varietäten $Ch(r, q)$. Darin sind r und q Zahlen, die nach der "allgemeinen" Dimension bzw. Ordnung (Def. 2.2.2) der Bilder $k(x)$ zu wählen sind.

Die $Ch(r, q)$ sind algebraische Varietäten, die als abgeschlossene komplexe Teilräume eines $\mathbb{P}_N$ (N hängt von r und q ab) realisierbar sind. Zu jeder Chow-Varietät existiert eine kanonische c -holomorphe Korrespondenz

$\lambda: Ch(r, q) \rightarrow \mathbb{P}_n$, deren Bilder sämtliche analytischen Teilmengen des $\mathbb{P}_n$ der Dimension r und der Ordnung q durchlaufen (Satz 2.3.8). Aus den verschiedenen Chow-Varietäten läßt sich ein komplexer Raum $Ch = Ch(\mathbb{P}_n)$ konstruieren, über den jede natürliche c -holomorphe Korrespondenz $k: X \rightarrow \mathbb{P}_n$ durch eine meromorphe Abbildung faktorisiert werden kann.

In §0 werden elementare Definitionen gegeben und für das Folgende wichtige Dimensionssätze, insbesondere der anwendungsreiche Satz 2.0.3 über die Dimension der Bilder c -holomorpher Korrespondenzen bewiesen.

§1 enthält einen "relativen Satz von Chow", den man kurz so formulieren kann: Jede holomorphe Korrespondenz

in einen projektiven Raum ist lokal "pseudoalgebraisch" (vgl. die Bemerkung 3 zu Satz 2.1.1). Es folgen einige Beispiele.

In §2 werden die hauptsächlichsten Hilfsmittel für den §3 bereitgestellt, in welchem die eigentliche Konstruktion der Chow-Varietäten $Ch(r,q)$ durchgeführt wird. Dabei wird das klassische Verfahren von WEI-LIANG CHOW (in der Darstellung von B. L. van der WAERDEN [27]) in fast ausschließlich analytische Terme übersetzt, bis endlich eine gemeinsame Behandlung von Bild- und Urbildraum einer Korrespondenz $k: X \rightarrow \mathbb{P}_n$ möglich wird. Man erhält dann zu k eine Korrespondenz in eine der Chow-Varietäten, aus der unter bestimmten Bedingungen die gesuchte meromorphe Faktorisierungsabbildung ausgesondert werden kann.

In §4 wird das Zerlegungsverhalten c -holomorpher Korrespondenzen untersucht und aus den entsprechenden Sätzen eine starke Verallgemeinerung der Ergebnisse des dritten Paragraphen abgeleitet.

§0 Die komplexe Mannigfaltigkeit $\mathbb{P}_n$

Definition 2.0.1 Auf $\mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\}$ sei folgende Äquivalenzrelation erklärt: $x \sim y := \exists z \in \mathbb{C}: x = z \cdot y$.

Der (topologische) Quotientenraum nach dieser Äquivalenzrelation heiße $\mathbb{P}_n := (\mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\}) / \sim$, der n-dimensionale projektive Raum (bezüglich des Körpers der komplexen Zahlen). Die kanonische Projektion werde $p: \mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{P}_n$ genannt. Ist $y = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\}$, so wird $(y_1, \dots, y_n) := p(y)$ geschrieben (sog. homogene Koordinaten). Das Symbol $\mathbb{P}_n$ soll stets auch die komplexe Struktur mitbezeichnen, die im Folgenden beschrieben wird. ////

Der topologische Abschluß von p (s. Def. 0.1.2) in $\mathbb{C}^{n+1} \times \mathbb{P}_n$ werde $\bar{p}$ genannt. $\bar{p}$ ist eine c-stetige Korrespondenz $\mathbb{C}^{n+1} \multimap \mathbb{P}_n$ mit $\bar{p}|_{\mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\}} = p$ und $\bar{p}(0) = \mathbb{P}_n$.

Der $\mathbb{P}_n$ besitzt die Struktur einer komplexen Mannigfaltigkeit der (komplexen) Dimension n , bezüglich der $\bar{p}$ eine meromorphe Abbildung mit der einzigen Unbestimmtheitsstelle $0 \in \mathbb{C}^{n+1}$ ist [22]. Ein System von Karten ist z.B. durch $Z_v := \{(x_0 : \dots : x_n) \in \mathbb{P}_n : x_v \neq 0\}$, $\varphi_v: Z_v \rightarrow \mathbb{C}^n$ mit $(x_0 : \dots : x_n) \mapsto (x_0/x_v, \dots, (1), \dots, x_n/x_v)$, $v = 0, \dots, n$, gegeben. Die so definierte Mannigfaltigkeit $\mathbb{P}_n$ ist kompakt. Folglich sind die analytischen Mengen hiervon kompakte komplexe Teilräume. Als solche nennt man sie algebraische Varietäten.

Die Dimension eines komplexen Raumes X wird wie üblich definiert (vgl. etwa [13]). Kurzgefaßt stellt sich diese Definition wie folgt dar:

In einem gewöhnlichen Punkt $x \in X$ ist X lokal isomorph zu einem n -dimensionalen Polyzylinder. Dort wird $\dim_x X = n$ gesetzt. Ist $y \in X$ kein gewöhnlicher Punkt von X , so gibt es in jeder Umgebung U_1 ($1 \in \mathbb{N}$) einer Umgebungsbasis von y gewöhnliche Punkte von X . Es wird sodann $\dim_y X := \min_{1 \in \mathbb{N}} \sup \{ \dim_z X : z \text{ gewöhnl. Punkt von } U_1 \}$ gesetzt. Diese Definition ist von der Wahl der Umgebungsbasis unabhängig. Die globale Dimension $\dim X$ ist das Supremum der lokalen Dimensionen $\dim_z X$. Hier werden nur lokal endlichdimensionale komplexe Räume betrachtet.

Im Folgenden wird als bekannt vorausgesetzt:

- a) Irreduzible komplexe Räume sind stets reindimensional (d.h. $\dim_x$ ist konstant).
- b) Kompakte komplexe Räume zerfallen in endlich viele irreduzible Komponenten [18].

Das Obige überträgt sich auf analytische Mengen eines komplexen Raumes Y , indem man sie als (abgeschlossene) komplexe Teilräume (vgl. [1]) von Y auffaßt.

Die folgenden zwei Aussagen geben Aufschluß über das Verhalten analytischer Teilmengen projektiver Räume beim Schnitt mit Hyperebenen (das sind Teilmengen, die durch eine einzige

lineare homogene Gleichungen in den homogenen Koordinaten bestimmt sind. Vgl. Def. 2.2.1). Diese Schnittbildung wird ein wichtiges Konstruktionsmittel werden.

Satz 2.0.1: Sei A eine nichtleere analytische Menge des $\mathbb{P}_n$ und r eine natürliche Zahl.

Genau dann ist $\dim A \leq r$ (bzw. $\geq r$), wenn folgende Bedingung erfüllt ist:

($\leq$): Es gibt r Hyperebenen $H_1, \dots, H_r$ des $\mathbb{P}_n$, sodaß $A \cap H_1 \cap \dots \cap H_r$ endlich (oder leer) ist.

($\geq$): Ist H ein beliebiger Durchschnitt von r Hyperebenen des $\mathbb{P}_n$, so ist $A \cap H = \emptyset$.)

Beweis: Wir beweisen diese Aussage durch Induktion nach r mit Hilfe der Folgerung aus [18] Prop. 13, p. 60:

(*) Ist A ein rein r -dimensionaler komplexer Raum, und ist $H \subset A$ lokal Nullstellengebilde einer nicht identisch verschwindenden holomorphen Funktion, sowie abgeschlossen und nicht leer, so ist H ein rein $(r-1)$ -dimensionaler komplexer Teilraum von A . //

Der leere Durchschnitt werde dem $\mathbb{P}_n$ gleichgesetzt. Damit ist der Fall $r = 0$ logisch miteingeschlossen, und für den Induktionsanfang ist nichts zu zeigen. Offenbar kann man sich im Folgenden auf reindimensionale A beschränken.

$\leq$: a) Sei $\dim A \leq r$, $r \geq 1$, und seien $x_i \in A_i$ Punkte der irreduziblen Komponenten A_i von A ($i = 1, \dots, k$, $A = \bigcup_{i=1}^k A_i$). Sei H_r eine Hyperebene des $\mathbb{P}_n$, die $\{x_1, \dots, x_k\}$

nicht trifft (Existenz: Dualisieren. Beweis Satz 2.0.2). Man kann nun (*) auf $A \cap H_r \subset A$ anwenden. Es folgt $\dim A \cap H_r \leq r - 1$, und die Induktionsvoraussetzung liefert Hyperebenen $H_1, \dots, H_{r-1}$, sodaß $A \cap H_1 \cap \dots \cap H_r = (A \cap H_r) \cap H_1 \cap \dots \cap H_{r-1}$ endlich oder leer ist.

b) Seien $H_1, \dots, H_r$ Hyperebenen, sodaß $A \cap H_1 \cap \dots \cap H_r$ endlich oder leer ist. Nach Induktionsvoraussetzung ist

$\dim A \cap H_r \leq r - 1$. Angenommen, $\dim A$ wäre größer als r , so folgte aus (*) $\dim A \cap H_r > r - 1$, da $A \cap H_r = \emptyset$ nur wenn $\dim A = 0$. Das ist ein Widerspruch, also ist $\dim A \leq r$.

$\geq$: c) Sei $\dim A \geq r \geq 1$. Dann ist für beliebige Hyperebenen H_r nach (*) $\dim A \cap H_r \geq r - 1$, also nach Induktionsvoraussetzung für beliebige Hyperebenen $H_1, \dots, H_{r-1}$

$$A \cap H_1 \cap \dots \cap H_r = (A \cap H_r) \cap H_1 \cap \dots \cap H_{r-1} \neq \emptyset.$$

d) Sei für beliebige Hyperebenen $H_1, \dots, H_r$

$A \cap H_1 \cap \dots \cap H_r \neq \emptyset$, so ist nach Induktionsvoraussetzung für beliebige Hyperebenen H_r $\dim A \cap H_r \geq r - 1$, insbesondere für eine solche, die keine irreduzible Komponente von A enthält (Existenz siehe Punkt a). Für eine solche erfüllt $A \cap H_r$ die Voraussetzungen von (*). Wäre also $\dim A < r$, so folgte $\dim A \cap H_r < r - 1$, ein Widerspruch. Also ist $\dim A \geq r$.

////

Satz 2.0.2: Ein Punkt $y \in \mathbb{P}_n$ liegt genau dann in der rein r -dimensionalen analytischen Teilmenge A des $\mathbb{P}_n$, wenn für je $r + 1$ Hyperebenen $H_0, \dots, H_r$ durch y (d.h. $y \in H_0 \cap \dots \cap H_r$) gilt

$$A \cap H_0 \cap \dots \cap H_r \neq \emptyset.$$

Beweis: Wir beziehen uns auch hier auf die Hilfsaussage (*) im Beweis von Satz 2.0.1 und führen den Beweis durch Induktion nach r . Es ist stets nur eine Richtung zu zeigen.

Für $r = 0$ lautet die Aussage: " $y \in A = \{x_1, \dots, x_k\} \Leftrightarrow$ Jede Hyperebene durch y trifft A ". Es genügt zu zeigen: Ist $y \notin A$, so gibt es Hyperebenen H_0 durch y , die keinen der Punkte $x_1, \dots, x_k$ enthalten. Die dazu duale Aussage (mit den offensichtlichen Bezeichnungen Y, X_k , etc.) lautet: "Ist Y eine von den Hyperebenen $X_1, \dots, X_k$ verschiedene Hyperebene, so gibt es einen Punkt h_0 auf Y , der in keiner der $X_1, \dots, X_k$ liegt", und diese Aussage trifft zu, da unter den gegebenen Voraussetzungen die Menge $Y \cap (X_1 \cup \dots \cup X_k)$ dünn in Y ist. Damit ist der Induktionsanfang gezeigt.

Sei nun A rein r -dimensional, $r > 0$, und sei $y \notin A$. Zu zeigen ist die Existenz von $r + 1$ Hyperebenen durch y , deren Durchschnitt A nicht trifft. Seien dazu $x_1 \in A_1$ Punkte der irreduziblen Komponenten von A ($i = 1, \dots, k$, $A = \bigcup_{i=1}^k A_i$), und H_0 eine Hyperebene durch y , die

$\{x_1, \dots, x_k\}$ nicht trifft. Nach (*) ist $A \cap H_0$ rein $(r-1)$ -dimensional, und da y nicht in $A \cap H_0$ liegt, gibt es laut Induktionsvoraussetzung r Hyperebenen $H_1, \dots, H_r$ durch y , für die $A \cap H_0 \cap \dots \cap H_r \neq \emptyset$ ist.

////

Satz 2.0.3: Sind X und Y komplexe Räume, und ist $k: X \rightarrow Y$ eine c -holomorphe Korrespondenz, so ist für jede ganze Zahl $r \geq -1$ die Menge

$$\Sigma_r(k) := \{x \in X: \dim k(x) \geq r\}$$

analytisch in X .

Beweis: Ist $f: A \rightarrow B$ eine holomorphe Abbildung zwischen komplexen Räumen, so ist nach einer leichten Verallgemeinerung einer Aussage von REMMERT [19] (vgl. [13]) die Menge $D_r(f) := \{x \in A: \dim_x f^{-1}f(x) \geq r\}$ analytisch in A . Wendet man dieses Resultat auf die eigentliche holomorphe Abbildung $\check{k}: G_k \rightarrow X$ an, so erhält man die analytische Menge $D_r(\check{k})$ in G_k , deren Bild unter $\check{k}$ nach dem

Remmert'schen Abbildungssatz analytisch in X ist. Es ist daher $\check{k}(D_r(\check{k})) = \{x \in X: \exists y \in k(x): \dim_{(x,y)} \check{k}^{-1}\check{k}(x,y) \geq r\}$
 $= \{x \in X: \max_{y \in k(x)} \dim_{(x,y)} \check{k}^{-1}(x) \geq r\} =$
 $= \{x \in X: \dim k(x) \geq r\} = \Sigma_r(k)$ analytisch in X .////

(S. 40 entfällt).

§1 Der Satz von Chow

Dieser Satz [7] besagt, daß jede analytische Menge des $\mathbb{P}_n$ Nullstellengebilde eines Systems homogener Polynome $p_1, \dots, p_s$ (s geeignet) ist, also Lösungsmenge eines Gleichungssystems $\sum_{|v| = q_\sigma} b_v^{(\sigma)} y^v = p_\sigma(\eta) = 0$ ($\sigma=1, \dots, s$)

, wobei $y = (y_0, \dots, y_n) \in \mathbb{C}^{n+1}$, $\eta = (y_0 : \dots : y_n) \in \mathbb{P}_n$, und die Koeffizienten (b) komplexe Zahlen sind. Die q_σ sind per definitionem die (Total-)Grade der homogenen Polynome p_σ . Es wird die übliche abkürzende Schreibweise für Polyindizes $v = (v_0, \dots, v_n)$ angewendet, insbesondere ist $|v| := v_0 + \dots + v_n$.

Hat man Gleichungssysteme mit variablen Koeffizienten vorliegen, so bietet sich an, die Abhängigkeit der Lösungsmenge von den Koeffizienten auszudrücken als eine Korrespondenz in $\mathbb{P}_n$. Dies geschieht durch folgende

Definition 2.1.1: Es seien gegeben:

Natürliche Zahlen $r, N_1, \dots, N_r$ und

r injektive Abbildungen $v_\rho : [0, N_\rho] \rightarrow \mathbb{N}^{n+1}$, $\rho = 1, \dots, r$,

($[0, N] := \{n \in \mathbb{N} : 0 \leq n \leq N\}$).

Für alle

$\rho = 1, \dots, r$ und $i, j \in [0, N_\rho]$ sei $|v_\rho(i)| = |v_\rho(j)|$.

(Das Symbol $\mathcal{J}$ vertrete die Gesamtheit dieser Daten, und wir sprechen dann abkürzend von der Indizierung $\mathcal{J}$.)

Damit wird nun definiert:

1) Die Korrespondenz $\mathcal{J} : \mathbb{C}^{N_1+1} \times \dots \times \mathbb{C}^{N_r+1} \longrightarrow \mathbb{P}_n$
vermöge $\alpha = (\alpha^{(1)}, \dots, \alpha^{(r)}) \longmapsto$

$\longmapsto \{(y_0 : \dots : y_n) \in \mathbb{P}_n : \forall \rho = 1, \dots, r : \sum_{j=0}^{N_\rho} \alpha_j^{(\rho)} y^{v_\rho(j)} = 0\},$

wo $\alpha^{(\rho)} = (\alpha_0^{(\rho)}, \dots, \alpha_{N_\rho}^{(\rho)}) \in \mathbb{C}^{N_\rho+1}$ ist, sowie

2) die Korrespondenz $\mathcal{J}^* : \mathbb{P}_{N_1} \times \dots \times \mathbb{P}_{N_r} \longrightarrow \mathbb{P}_n$
vermöge $a = (a^{(1)}, \dots, a^{(r)}) \longmapsto$

$\longmapsto \{(y_0 : \dots : y_n) \in \mathbb{P}_n : \forall \rho = 1, \dots, r : \sum_{j=0}^{N_\rho} \alpha_j^{(\rho)} y^{v_\rho(j)} = 0\},$

wo nun $a^{(\rho)} = (\alpha_0^{(\rho)} : \dots : \alpha_{N_\rho}^{(\rho)}) \in \mathbb{P}_{N_\rho}$ ist. ////

Man sieht ohne weiteres, daß diese Definition unabhängig von der getroffenen Repräsentantenauswahl ist.

Die Korrespondenzen $\mathcal{J}$ und $\mathcal{J}^*$ sind G-analytisch, also c-holomorph.

Damit kann man jetzt die Relativierung des Satzes von Chow folgendermaßen ausdrücken:

Satz 2.1.1: Seien X ein reduzierter komplexer Raum und $k : X \longrightarrow \mathbb{P}_n$ eine G-analytische (also c-holomorphe) Korrespondenz.

Dann gibt es zu jedem $x_0 \in X$ eine Umgebung U von x_0 , eine Indizierung $\mathcal{J}$ mit den definierenden Daten $s, N_1, \dots, N_s, v_1, \dots, v_s$, und eine holomorphe Abbildung $b: U \rightarrow \mathbb{C}^{N_1+1} \times \dots \times \mathbb{C}^{N_s+1}$ derart, daß

$$k|_U = \mathcal{J} \circ b \quad \text{ist.}$$

Beweis: Sei $\bar{p}: \mathbb{C}^{n+1} \rightarrow \mathbb{P}_n$ die in Kap. 2 §0 definierte meromorphe Abbildung, und sei $\Gamma := (\text{id}_X \times \bar{p})^{-1}(\text{Gk})$ der zum Graphen Gk von k gehörige "relative Kegel" über X in $X \times \mathbb{C}^{n+1}$. Γ ist als Urbild der analytischen Menge Gk bei der meromorphen Abbildung $\text{id}_X \times \bar{p}$ analytisch (Kap. 0 §3). Es ist für alle $c \in \mathbb{C}$ und $(x, y) \in \Gamma$ auch $(x, cy) \in \Gamma$.

Ist $x_0 \in X$ beliebig, so ist Γ analytisch insbesondere im Punkt $(x_0, 0) \in X \times \mathbb{C}^{n+1}$, und es gibt daher eine Umgebung U von x_0 und einen Polyzylinder P um den Ursprung $0 \in \mathbb{C}^{n+1}$, sowie $r \in \mathbb{N}$ derart, daß für alle $\rho = 1, \dots, r$ eine Folge holomorpher Funktionen $a_v^{(\rho)}$ gefunden werden kann, sodaß für alle $x \in U$ die Reihen $\sum_{v \in \mathbb{N}^{n+1}} a_v^{(\rho)}(x) \cdot y^v$ im Polyzylinder P kompakt konvergieren und $\Gamma \cap (U \times P)$ gemeinsames Nullstellengebilde der dadurch definierten holomorphen Funktionen ist (Bildung von Hartogsreihen aus den Γ in $(x_0, 0)$ beschreibenden Funktionskeimen.).

Für alle $(x, y) \in \Gamma \cap (U \times P)$ und $c \in \mathbb{C}$ mit $|c| < 1$ ist für $\rho = 1, \dots, r$ $\sum_v a_v^{(\rho)}(x) \cdot (cy)^v =$

$$= \sum_{q=0}^{\infty} c^q \cdot \sum_{|v|=q} a_v^{(\rho)}(x) y^v = 0 \quad . \text{ Nach dem Identitätssatz für}$$

Potenzreihen (in der Variablen c) gilt somit für alle

$q \in \mathbb{N}$ und alle $\rho = 1, \dots, r$:

$$\sum_{|v|=q} a_v^{(\rho)}(x) y^v = 0 \quad . \text{ Das impliziert } \Gamma \cap (U \times P) \subset$$

$$\subset \{(x, y) \in U \times P: \forall \rho = 1, \dots, r, q \in \mathbb{N}: \sum_{|v|=q} a_v^{(\rho)}(x) y^v = 0\}$$

und da die andere Inklusion trivial ist, erhält man die

Gleichheit, aus der durch eine einfache Rechnung mit Homo-

thetien die Gleichheit $\Gamma \cap (U \times \mathbb{C}^{n+1}) =$

$$\{(x, y) \in U \times \mathbb{C}^{n+1}: \forall \rho = 1, \dots, r, q \in \mathbb{N}: \sum_{|v|=q} a_v^{(\rho)}(x) y^v = 0\}$$

folgt.

Nach dem Rückert-Cartanschen Idealbasissatz (für homo-

gene Ideale vgl. etwa [10]) gibt es endlich viele unter

den angeschriebenen Pseudopolynomen, etwa ($\rho = 1, \dots, s$):

$$p_\rho(x, y) = \sum_{|v|=q_\rho} b_v^{(\rho)}(x) y^v, \text{ wobei die } q_\rho \text{ die jeweiligen}$$

Polynomgrade und die $b_v^{(\rho)}$ holomorphe Funktionen auf U

sind, sodaß insgesamt gilt: $\Gamma \cap (U \times \mathbb{C}^{n+1}) =$

$$= \{(x, y) \in U \times \mathbb{C}^{n+1}: \forall \rho = 1, \dots, s: p_\rho(x, y) = 0\}.$$

Indem man vermöge der Gleichung $G_k \cap (U \times \mathbb{P}_n) =$

$= (\text{id}_U \times \tilde{p})(\Gamma \cap (U \times (\mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\})))$ wieder zu projektiven

Koordinaten übergeht, kommt man zur Darstellung

$$G_k \cap (U \times \mathbb{P}_n) = G(k|U) =$$

$$= \{(x, \eta) \in U \times \mathbb{P}_n: \forall \rho = 1, \dots, s: \sum_{|v|=q_\rho} b_v^{(\rho)}(x) y^v = 0\},$$

aus der mit $b := (b^{(1)}, \dots, b^{(s)})$,

$$b^{(\rho)} := (b_0^{(\rho)}, \dots, b_{N_\rho}^{(\rho)}) \text{ unter geeigneter Ummumerierung}$$

der Funktionen $b_v^{(\rho)}$ mit Hilfe von (injektiven) Indizierungsabbildungen v_ρ (vgl. Def. 2.1.1, hier ist

$N_\rho = \binom{n+q\rho}{n} - 1$) die Behauptung des Satzes folgt. ////

Bemerkungen:

1) Definition und Satz 2.1.1 lassen sich ohne Schwierigkeit auf mehrfach projektive Räume übertragen. Dies wurde hier der Kürze und Übersichtlichkeit halber ausgespart.

2) Der zweite Teil des Beweises von Satz 2.1.1, die Darstellung des rel. Kegels Γ als Nullstellengebilde endlich vieler homogener Pseudopolynome mit holomorphen Koeffizientenfunktionen, ist nicht neu. Ein von H. CARTAN stammender Beweis (für den absoluten Fall) findet sich in [20]. Die einzige Schwierigkeit lag bislang im Nachweis dafür, daß der rel. Kegel Γ analytisch ist. Dieser gelang hier besonders einfach, indem die Urbildeigenschaft der meromorphen Abbildung $\text{id} \times \bar{p}$ ausgenutzt wurde.

Es sei darauf hingewiesen, daß diese Konstruktion nicht auf den reduzierten Fall beschränkt ist. Für den Beweis eines relativen Satzes von Chow über beliebigen komplexen Räumen vgl. [10].

3) Nennt man eine Korrespondenz $k: X \rightarrow P_n$ "pseudoalgebraisch", wenn ihr Graph Nullstellengebilde von homogenen Pseudopolynomen mit auf X holomorphen Koeffizienten ist, so läßt sich ob. Satz kurz so formulieren:

Jede c-holomorphe Korrespondenz in einen projektiven Raum ist lokal "pseudoalgebraisch".

4) Der Satz von Chow folgt aus Satz 2.1.1, wenn man für X einen Punkt nimmt.

Beispiele: (Die im Folgenden auftretenden Indizierungen werden stets durch die ihnen zugeordneten Korrespondenzen angedeutet. Die dadurch auftretende Mehrdeutigkeit ist unwesentlich.)

1) $k: X \rightarrow \mathbb{P}_n$ sei eine c-holomorphe Abbildung (= Abbildung, die als Korrespondenz c-holomorph ist).

a) Ist k eine holomorphe Abbildung, so kann sie lokal ($U \subset X$) faktorisiert werden mit $\mathcal{J} = \bar{p}: \mathbb{C}^{n+1} \rightarrow \mathbb{P}_n$ (eine mögliche Indizierung, die diese Korrespondenz liefert, sei durch die Zuordnung $\mathcal{J}(a_0, \dots, a_n) := \{(y_0, \dots, y_n) \in \mathbb{P}_n: a_0 y_1 - a_1 y_0 = 0, 1 = 0, \dots, n\}$ angedeutet), zusammen mit der holomorphen Abbildung

$b: U \rightarrow \mathbb{C}^{n+1}$, die sich aus der lokalen "prinzipalen" Darstellung $k|U = (f_0: \dots: f_n)$ mit irgendwelchen auf U holomorphen Repräsentantenfunktionen $f_0, \dots, f_n$ als $b := (f_0, \dots, f_n)$ gewinnen läßt. Es ist nirgends $b(x) = 0$.

Ist X ein Steinscher komplexer Raum oder ein Gebiet über einem $\mathbb{C}^m$, so ist eine solche Faktorisierung global möglich. (Für solches X ist das Poincaré-Problem gelöst.).

Die zugehörige Faktorisierung über $\mathcal{J}^* = \text{id}_{\mathbb{P}_n}$ und $b^* = k$ ist trivial.

b) Ist k nicht holomorph, so existiert lokal ($U \subset X$) stets eine "Quotientendarstellung" $k = \bar{p} \cdot (f_0, \dots, f_n)$ mit

auf U holomorphen Funktionen f_1 und der meromorphen Abbildung $\tilde{p}: \mathbb{C}^{n+1} \rightarrow \mathbb{P}_n$. Aber diese ist keine Faktorisierung im Sinn von Satz 2.1.1, weil hierin die meromorphe Komposition (vgl. etwa [29]) " $\circ$ " genommen werden muß, die hier im Gegensatz zum obigen Beispiel nicht mit der Komposition " $\cdot$ " übereinstimmt.

Ist z.B. $X = N = \{(x, y) \in \mathbb{C}^2: x^2 - y^3 = 0\}$ die Neilsche Parabel, und $k = i \circ v^{-1}$ ($n = 2$), wo $v: \mathbb{C} \rightarrow N$ die Normalisierungsabbildung $z \mapsto (z^3, z^2)$ und $i: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{P}$ die Injektion ist, so ist eine "Quotientendarstellung" von k durch $f_0(x, y) = y$, $f_1(x, y) = x$ ($(x, y) \in N$) gegeben. Aber es ist $k(0) \neq \tilde{p} \circ (f_0, f_1)(0) = \tilde{p}(0) = \mathbb{P}$ (wohl aber ist $k(0) = \tilde{p} \cdot (f_0, f_1)(0)$).

Eine Faktorisierung im Sinn von Satz 2.1.1 ist z.B. gegeben durch $\mathcal{J}: \mathbb{C}^4 \rightarrow \mathbb{P}$, $(a_1, \dots, a_4) \mapsto \{(y_0: y_1) \in \mathbb{P}: a_1 y_0^3 + a_2 y_1^3 = 0, a_3 y_0^2 + a_4 y_1^2 = 0\}$ und $b: N \rightarrow \mathbb{C}^4$, $(x, y) \mapsto (x, -1, y, -1)$.

Diese Faktorisierung läßt sich vermöge $\mathcal{J}^*$ und b^* nach $\mathbb{P}_1^2$ "absenken".

2) Sei nun $k: X \rightarrow \mathbb{P}_n$ eine c -holomorphe Korrespondenz.

a) Ist k eine meromorphe Abbildung, so kann sie außerhalb ihrer Singularitätenmenge nach Beispiel 1a behandelt werden. Das Verhalten in der Umgebung einer (außerwesentlichen) Singularität (vgl. auch 1b) sei an zwei Beispielen geschildert:

Für das erste Beispiel sei $n = 2$, $X = \mathbb{C}^2$, $k = \tilde{p}: \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{P}$. Eine zugehörige Faktorisierung von k ist trivial: $\mathcal{J} = \tilde{p}$, $b = \text{id}_{\mathbb{C}^2}$. Diese läßt sich nun nicht

mehr zu einer Faktorisierung über g^* und b^* "absenken".

Ein weniger triviales Beispiel ist folgendes: Sei $n = 2$,
 $X = \{(x, y) \in \mathbb{C}^2: xy = 0\}$ das "Achsenkreuz", und k die
meromorphe Beschränkung (vgl. [22]) von $\bar{p}: \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{P}$ auf X .
($k(x, 0) = (1:0)$, $x \neq 0$; $k(0, y) = (0:1)$, $y \neq 0$;
 $k(0, 0) = \{(1:0), (0:1)\}$). Hier ist eine Faktorisierung
durch $g: \mathbb{C}^3 \dashrightarrow \mathbb{P}$, $(z_1, z_2, z_3) \mapsto$
 $\{(y_0:y_1) \in \mathbb{P}: z_1 y_0 = 0, z_2 y_1 = 0, z_3 y_0 y_1 = 0\}$ und
 $b: X \rightarrow \mathbb{C}^3$, $(x, y) \mapsto (y, x, 1)$, gegeben.

Man beachte, daß hier in der Definition von g , anders
als im vorhergehenden Beispiel, das quadratische Monom
 $y_0 y_1$ auftaucht. Der Grund dafür ist, daß bei der meromor-
phen Beschränkung der Graph von $\bar{p}|X$ "ausgedünnt" wurde.

b) $k = \bar{p}|X$ (X das "Achsenkreuz", Beisp. 2a) dient als
Beispiel einer c -holomorphen Korrespondenz, die keine mero-
morphe Abbildung ist. Eine Faktorisierung ist durch

$g: \mathbb{C}^2 \dashrightarrow \mathbb{P}$, $(a_1, a_2) \mapsto \{(y_0:y_1): a_1 y_0 = 0, a_2 y_1 = 0\}$
und $b: X \rightarrow \mathbb{C}^2$, die Injektion von X in $\mathbb{C}^2$ gegeben.
(Hier taucht das quadratische Monom von 2a nicht auf.)

3) Indizierungen können dazu dienen, "pseudoalgebraische"
Korrespondenzen zu konstruieren. Für das Folgende sei $\mathcal{H}_q$
eine Indizierung "für" die Hyperflächen des $\mathbb{P}_n$ der Ord-
nung q , angedeutet durch die Korrespondenz

$$\mathcal{H}_q^*: \mathbb{P}_N \dashrightarrow \mathbb{P}_n, (a_0: \dots: a_N) \mapsto$$

$$\{(y_0: \dots: y_n) \in \mathbb{P}_n: \sum_{i=0}^N a_i y^{v(i)} = 0\}, \text{ wo}$$

$N = \binom{n+q}{n} - 1$ ist, und $v: i \mapsto v(i)$ eine bestimmte

Reihenfolge der Polyindizes $v \in \mathbb{N}^{n+1}$ mit $|v| = q$ festlegt.

a) Durch $\mathbb{H}_q^*$ wird die Menge aller Hyperflächen der Ordnung q des $\mathbb{P}_n$ "parametrisiert" (sie entspricht einer offenen dichten Teilmenge des $\mathbb{P}_n$), zusammen mit der Menge derjenigen Hyperflächen niederer Ordnung, die sich durch eine homogene Gleichung vom Grad q darstellen lassen (entsprechend den "Hyperflächen mit Vielfachheit von der Ordnung q ").

b) Sei $n = 2$, $q = 3$. $\mathbb{H}_3^*: \mathbb{P}_9 \rightarrow \mathbb{P}_2$ "parametrisiert" die Menge der Kubiken des $\mathbb{P}_2$ (sie entspricht einer offenen dichten Teilmenge des $\mathbb{P}_9$), zusammen mit der Menge der reziproken Hyperflächen der Ordnung 2 (Ebenenpaare) und der Menge der Hyperebenen (beides in $\mathbb{P}_9$ dünne Mengen, letztere realisiert durch die Menge der Koeffiziententupel der Polynome $(\alpha y_0 + \beta y_1 + \gamma y_2)^3$). Man beachte, daß $\mathbb{H}_3^*$ die Ebenenpaare je zweimal liefert.

§2 Konstruktion der Chow-Varietäten (1)

Ein für das Folgende wichtiges Konstruktionsmittel sind die für analytische Mengen $A \subset \mathbb{P}_n$ zu bildenden Korrespondenzen f_A und g_A . Dazu die

Definition 2.2.1: Sei $r \in \mathbb{N}^*$, und sei

$\delta_r: \mathbb{P}_n^r \rightarrow \mathbb{P}_n$ gegeben durch $(\overset{1}{u}, \dots, \overset{r}{u}) \rightarrow$
 $\rightarrow \{v \in \mathbb{P}_n: (\overset{1}{u} \cdot v) = \dots = (\overset{r}{u} \cdot v) = 0\}$ (wie üblich wurde für
 $u, v \in \mathbb{P}_n$ $(u \cdot v) := u_0 v_0 + \dots + u_n v_n$ gesetzt).

Mit $\delta := \delta_1: \mathbb{P}_n \rightarrow \mathbb{P}_n$ (Dualitätskorrespondenz) ist
 $\delta_r(\overset{1}{u}, \dots, \overset{r}{u}) = \delta(\overset{1}{u}) \cap \dots \cap \delta(\overset{r}{u})$.

Ist $A \subset \mathbb{P}_n$ eine (analytische) Teilmenge, so seien
 $f_A: \mathbb{P}_n^r \rightarrow \mathbb{P}_n$ durch $(\overset{1}{u}, \dots, \overset{r}{u}) \rightarrow A \cap \delta_r(\overset{1}{u}, \dots, \overset{r}{u})$,
 $g_A: \mathbb{P}_n^r \rightarrow \mathbb{P}_n$ durch $g_A := \delta \circ f_A$ definiert. ///

Im allgemeinen wird f_A und g_A nur dann gebildet werden, wenn $r = \dim A$ ist; andernfalls wird das jeweils anzunehmende r aus dem Kontext hervorgehen.

Offenbar entspricht die Bildung von f_A gerade der Schnittbildung aus A und Durchschnitten von jeweils r Hyperebenen (vgl. Satz 2.0.1).

Satz 2.2.1: Ist $A \subset \mathbb{P}_n$ analytisch, $\dim A = r$ und $f_A, g_A: \mathbb{P}_n^r \rightarrow \mathbb{P}_n$ wie oben, so gilt:

- f_A und g_A sind c-holomorph.
- f_A hat auf einer offenen und dichten Menge des $\mathbb{P}_n^r$ nulldimensionale, g_A dort rein $(n-1)$ -dimensionale Bilder (genauer: endliche Vereinigungen von Hyperebenen).
- f_A ist genau dann irreduzibel, wenn A irreduzibel ist. Dasselbe gilt für g_A . Ist $\{A_i\}$ eine Zerlegung von A in irreduzible Komponenten, so ist $\{f_{A_i}\}$ eine Zerlegung von f_A , und $\{g_{A_i}\}$ eine Zerlegung von g_A in irre-

duzible Komponenten.

d) A ist genau dann reindimensional, wenn f_A natürlich ist. Dasselbe gilt für g_A .

e) Ist A reindimensional, so ist der Graph Gg_A eine symmetrische Hyperfläche des $\mathbb{P}_n^{r+1}$ (d.h. invariant gegen Vertauschungen der Faktoren $\mathbb{P}_n$).

Beweis: a) δ_r ist offenbar G -analytisch, also c -holomorph. $f_A = \delta_r \cap C_A$ mit der konstanten Korrespondenz $C_A: \mathbb{P}_n^r \rightarrow \mathbb{P}_n$ mit Bild A , also ist f_A nach Satz 0.2.4 c -holomorph, $g_A = \delta \circ f_A$ nach Satz 0.2.3.

b) Die Menge $\Sigma_1 = \{u \in \mathbb{P}_n^r: \dim f_A(u) \geq 1\}$ ist analytisch (Satz 2.0.3). Nach Satz 2.0.1 existiert wegen $\dim A \leq r$ wenigstens ein Punkt $u \in \mathbb{P}_n^r$, sodaß $f_A(u) = A \cap \delta_r(u)$ endlich, also nulldimensional ist (wegen $\dim A \geq r$ ist f_A voll). Also ist $\Sigma_1 \neq \mathbb{P}_n^r$ eine dünne analytische Menge des irreduziblen $\mathbb{P}_n^r$. Auf dem offenen und dichten Komplement von Σ_1 ist daher $f_A(u)$ stets eine endliche (nichtleere) Menge, d.h. nulldimensional.

Entsprechend ist dort $g_A(u)$ eine endliche Vereinigung von Hyperebenen des $\mathbb{P}_n$, also rein $(n-1)$ -dimensional.

Dem Beweis von Teil c seien drei Hilfssätze vorausgeschickt.

Lemma 2.2.2: Ist $k: X \rightarrow \mathbb{P}_n$ c -holomorph und irreduzibel, so sind für alle $r \in \mathbb{N}$ auch die Korrespondenzen $k_r: X \times \mathbb{P}_n^r \rightarrow \mathbb{P}_n$, gegeben durch $(x, u) \mapsto k(x) \cap \delta_r(u)$, c -holomorph und irreduzibel.

Beweis: k_r ist c-holomorph (Satz 0.2.4).

Die holomorphe Abbildung $f: Gk_r \rightarrow Gk$, die von der Projektion $X \times \mathbb{P}_n^r \times \mathbb{P}_n \rightarrow X \times \mathbb{P}_n$ herrührt, ist surjektiv, eigentlich und offen. Denn ihre Faser über $(x, y) \in Gk$ ist $\{x\} \times \delta_r^{-1}(y) \times \{y\}$ und ist wegen $\delta_r^{-1}(y) = \delta(y)^r$ irreduzibel und von der konstanten Dimension $r \cdot (n - 1)$. Daraus folgt, daß f jede irreduzible Komponente G_i von Gk_r auf ganz Gk abbildet, und da f eigentlich ist, daß nur endlich viele G_i existieren.

Sei $\Omega_i := \{z \in Gk: f^{-1}(z) \subset G_i\}$. Da $f^{-1}(z)$ irreduzibel ist, gibt es zu jedem $z \in Gk$ ein i , sodaß

$f^{-1}(z) \subset G_i$ ist. Also wird Gk durch die Ω_i überdeckt. Da diese Überdeckung endlich ist, ist eines ihrer Elemente, etwa Ω_i , dicht bezüglich einer nichtleeren offenen Menge $\Omega \subset Gk$.

Da f offen ist, liegt $f^{-1}(\Omega_i)$ dicht bezüglich $f^{-1}(\Omega)$. Nach Definition ist $f^{-1}(\Omega_i) \subset G_i$, also $f^{-1}(\Omega) \subset \overline{f^{-1}(\Omega_i)} \subset G_i$. Da $f|_{G_i}$ surjektiv ist, gilt $G_i \cap f^{-1}(\Omega) \neq \emptyset$, und weil trivialerweise $G_i \cap f^{-1}(\Omega) \subset f^{-1}(\Omega) = G_i \cap f^{-1}(\Omega)$ ist, folgt aus dem Identitätssatz für analytische Mengen $G_i \subset G_i$. Gk_r ist irreduzibel. //

Lemma 2.2.3: Ist $k: X \rightarrow \mathbb{P}_n$ c-holomorph und

$h: X \rightarrow \mathbb{P}_n$ die größte Korrespondenz mit $\delta \circ h \subset k$, so ist h c-holomorph.

Beweis: Offenbar ist $Gh = \{(x, y) \in X \times \mathbb{P}_n : \delta(y) \subset k(x)\}$.

Sei $k_1: X \times \mathbb{P}_n \rightarrow \mathbb{P}_n$ definiert durch $(x, y) \mapsto k(x) \cap \delta(y)$. k_1 ist c-holomorph (Lemma 2.2.2 oder Satz 0.2.4) und es gilt $Gh = \{(x, y) : \dim k_1(x, y) \geq n - 1\}$. Denn es ist $\dim(k(x) \cap \delta(y)) \geq n - 1$ genau dann, wenn $\delta(y) \subset k(x)$, weil $\delta(y)$ irreduzibel ist. Nach Satz 2.0.3 ist Gh eine analytische Teilmenge von $X \times \mathbb{P}_n$, also ist h c-holomorph. //

Lemma 2.2.4: Ist $k: X \rightarrow \mathbb{P}_n$ c-holomorph und irreduzibel, so ist auch $\delta \circ k: X \rightarrow \mathbb{P}_n$ (c-holomorph und) irreduzibel.

Beweis: Es genügt zu zeigen, daß für beliebige G-analytische Korrespondenzen $f_1, f_2: X \rightarrow \mathbb{P}_n$ mit $\delta \circ k \subset f_1 \cup f_2$ $\delta \circ k$ stets schon in einer der beiden enthalten ist.

Sei dazu $g_i(x) := \{y \in \mathbb{P}_n : \delta(y) \subset f_i(x)\}$, $x \in X$, $i = 1, 2$. Die so definierten Korrespondenzen sind nach Lemma 2.2.3 c-holomorph.

Es ist $k \subset g_1 \cup g_2$, denn für $y \in k(x)$ ist $\delta(y) \subset \delta \circ k(x) \subset f_1(x) \cup f_2(x)$, also $\delta(y) \subset f_1(x)$ oder $\delta(y) \subset f_2(x)$, weil $\delta(y)$ irreduzibel ist. Daher ist $y \in g_1(x) \cup g_2(x)$. Da k irreduzibel ist, folgt o.B.d.A. $k \subset g_1$. Aus der Definition von g_1 folgt $\delta \circ g_1 \subset f_1$, also $\delta \circ k \subset f_1$. Somit ist $\delta \circ k$ irreduzibel. //

Beweis von Satz 2.2.1 (Forts.): c) f_A irreduzibel $\Rightarrow$

$\Rightarrow A = \text{Bild } f_A \text{ irreduzibel} \Rightarrow f_A \text{ irreduzibel}$ (Lemma 2.2.2 mit $k = C_A$) $\Rightarrow g_A \text{ irreduzibel}$ (Lemma 2.2.4 mit $k = f_A$).

Daraus folgt bereits: Ist $\{A_i\}$ eine Zerlegung von A in irreduzible Komponenten, so ist $\{f_{A_i}\}$ eine Zerlegung von f_A in irreduzible Komponenten.

Um die verbleibende Implikation ($g_A \text{ irreduzibel} \Rightarrow f_A \text{ irreduzibel}$) zu zeigen, genügt es nachzuweisen, daß keines der g_{A_j} ein g_{A_i} enthält, falls $i \neq j$. (Damit ist dann auch die Aussage über die Zerlegung von g_A in irreduzible Komponenten mitbewiesen.)

Angenommen, es wäre $g_{A_i} \subset g_{A_j}$ ($i \neq j$). Da $\dim A_j \leq r$ ist, gibt es zu jedem $x \in A_i$ wenigstens ein $u \in \mathbb{P}_n^r$ mit $x \in \delta_r(u)$ und $A_j \cap \delta_r(u) = \{y_1, \dots, y_m\}$ ($m \geq 1$ geeignet). (Der Beweis dieser Tatsache, der durch Induktion über $\dim A_j$ auf die Aussage zurückgeführt werden kann, daß für $\dim A_j > 0$ durch jeden Punkt des $\mathbb{P}_n$ eine Hyperebene H geht mit $\dim H \cap A_j < \dim A_j$, sei der Kürze halber übergangen.)

Hieraus folgt $\delta(x) \subset \delta \circ f_{A_i}(u) = g_{A_i}(u) \subset g_{A_j}(u) = \delta(\{y_1, \dots, y_m\})$, also o.E. $\delta(x) \subset \delta(y_1)$. Daher ist $x = y_1 \in f_{A_j}(u)$, und somit $x \in A_j$. Dies ergibt im Widerspruch zur Definition der A_i $A_i \subset A_j$. Daher: $f_A \text{ reduzibel} \Rightarrow g_A \text{ reduzibel}$, was noch zu zeigen war.

d) Man zerlege hierfür A in irreduzible Komponenten und wende Teil a und Teil c an. Da alle Komponenten dieselbe Dimension r haben, folgt, daß f_A und g_A natürlich

sind. Ist f_A natürlich, so ist jede irreduzible Komponente f_{A_i} von f_A voll. Daraus folgt nach Satz 2.0.1, daß für jede irreduzible Komponente A_i von A gilt:

$\dim A_i \geq r$. Zusammen mit der Voraussetzung $\dim A = r$ folgt, daß alle irreduziblen Komponenten von A dieselbe Dimension r haben. Ist g_A natürlich, so ist jede ihrer irreduziblen Komponenten voll, also wegen Teil c auch jede irreduzible Komponente von f_A . Also folgt, daß f_A natürlich und A reindimensional ist.

Teil e sei vorangestellt das

Lemma 2.2.5: Sei $k: X \dashrightarrow Y$ eine volle irreduzible c-holomorphe Korrespondenz, $r \in \mathbb{N}$.

Ist für alle $x \in X$ $k(x)$ rein r -dimensional, so gilt

$$\dim Gk = r + \dim X.$$

Beweis: Die Dimensionsaussage des "proper mapping theorem" (vgl. R.C. GUNNING / H. ROSSI, Analytic Functions of Several Complex Variables, Englewood Cliffs, N.J., 1965), angewendet auf die eigentliche surjektive holomorphe Abbildung $\check{k}: Gk \rightarrow X$ irreduzibler komplexer Räume besagt, daß zu jedem $x \in X$ eine Umgebung U von x existiert, sodaß $\dim_x X = \max \{ \dim_{(x', y')} Gk - \dim_{(x', y')} \check{k}^{-1} \check{k}(x', y') : (x', y') \in \check{k}^{-1}(U) \} =$
 $= \max \{ \dim_{(x', y')} Gk - \dim_{y'} k(x') : x' \in U, y' \in k(x') \} =$
 $= \dim Gk - r.$

Letztere Gleichheit folgt daraus, daß die Mengen Gk

und $k(x')$ reindimensional sind. Da auch X reindimensional ist, folgt die Behauptung. //

Aus dem Beweis ergibt sich sofort folgendes

Korollar: Sei X reindimensional, $k: X \dashrightarrow Y$ eine natürliche c -holomorphe Korrespondenz, $r \in \mathbb{N}$. Für alle x einer offenen dichten Menge $\Omega \subset X$ sei $k(x)$ rein r -dimensional.

Dann ist Gk reindimensional und $\dim Gk = r + \dim X$.//

Beweis von Satz 2.2.1 (Forts.):

e) Wendet man dieses Korollar auf g_A an, so folgt aus Teil a : $\dim Gg_A = n - 1 + \dim \mathbb{P}_n^r = n \cdot r + n - 1 = n \cdot (r + 1) - 1$. Also ist Gg_A eine reindimensionale analytische Teilmenge des $\mathbb{P}_n^{r+1}$ der Codimension 1 und somit per definitionem eine Hyperfläche.

Die Symmetrie von Gg_A folgt aus den Äquivalenzen:

$$\begin{aligned} \vec{v} \in g_A(\vec{v}, \dots, \vec{v}) &\Leftrightarrow \exists y \in f_A(\vec{v}, \dots, \vec{v}): y \in \delta(\vec{v}) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow A \cap \delta_{r+1}(\vec{v}, \dots, \vec{v}) \neq \emptyset \quad (\text{vgl. Satz 2.0.2 : } y \in A \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \forall u \in \delta_{r+1}^{-1}(y): \delta_{r+1}(u) \cap A \neq \emptyset). \end{aligned}$$

Damit ist Satz 2.2.1 vollständig bewiesen. ////

Definition 2.2.2: Ist A eine rein r -dimensionale analytische Menge des $\mathbb{P}_n$, $r \in \mathbb{N}$, so sei

$$\text{ord } A := \sup \{ \text{card } f_A(u) : u \in \mathbb{P}_n^r, \text{ card } f_A(u) < \infty \}.$$

Die Zahl $\text{ord } A$ heißt die Ordnung (anderswo: Grad) der analytischen (und damit algebraischen) Menge A . ////

Satz 2.2.6: Ist A eine rein r -dimensionale analytische Menge des $\mathbb{P}_n^r$ ($r \in \mathbb{N}$), so gibt es eine offene und dichte Teilmenge Ω des $\mathbb{P}_n^r$, sodaß für alle $u \in \Omega$

$$\text{card } f_A(u) = \text{ord } A \quad \text{ist.}$$

Beweis: Nach Satz 2.2.1a gibt es eine offene dichte Menge Ω' des $\mathbb{P}_n^r$, sodaß $f_A(u)$ nulldimensional ist für alle $u \in \Omega'$. $f_A|_{\Omega'}$ ist mit f_A c -holomorph und natürlich, Ω' ist o.E. irreduzibel. Durch Anwendung von Satz 1.2.3 auf $f_A|_{\Omega'}$ findet man eine Zahl $q \in \mathbb{N}^*$ und eine in Ω' dichte offene Menge Ω derart, daß für alle $u \in \Omega$

$$\text{card } f_A(u) = q \quad \text{ist.}$$

Da man $\Omega' = \{u \in \mathbb{P}_n^r : \dim f_A(u) = 0\} = \{u \in \mathbb{P}_n^r : \text{card } f_A(u) < \infty\}$ wählen kann, ist $q = \text{ord } A$.

////

§3 Konstruktion der Chow-Varietäten (2)

Satz 2.3.1: Ist A eine rein r -dimensionale analytische Menge des $\mathbb{P}_n$ der Ordnung q ($r, q \in \mathbb{N}$), so gibt es ein $(r+1)$ -fach homogenes Polynom p_A (der Variablen $u^0, \dots, u^r$ "aus" $\mathbb{P}_n$) vom jeweiligen Grad q , das den Graph Gg_A zum Nullstellengebilde hat.

p_A ist symmetrisch in den Variablen $u^0, \dots, u^r$ und ist bis auf einen konstanten Faktor aus $\mathbb{C}^*$ eindeutig bestimmt.

Beweis: Nach der Verallgemeinerung des Satzes von Chow auf mehrfach projektive Räume ist eine Hyperfläche des $\mathbb{P}_n^{r+1}$ als Nullstellengebilde eines $(r+1)$ -fach homogenen Poly-

noms darstellbar. Gg_A ist nach Satz 2.2.1 eine symmetrische Hyperfläche des $\mathbb{P}_n^{r+1}$. Sei p ein Polynom, homogen in den Variablen $\vec{u} = (u_0^\sigma, \dots, u_n^\sigma)$, $\sigma = 0, \dots, r$, das Gg_A zur Nullstellenmenge hat.

Es soll nun gezeigt werden, daß p so gewählt werden kann, daß der Grad von p in jeder der (Poly-)Variablen u^σ gleich q ist. Dazu muß der Übergang vom Lokalen (analytisch) zum Globalen (algebraisch) bewerkstelligt werden, was hier wie folgt durchgeführt wird.

Sei $R := \mathbb{C}(\tilde{u}, u')$ der Körper der rationalen Funktionen (vgl. [26], [27]) in den Unbestimmten $\tilde{u} = (u_1^0, \dots, u_n^0)$ und $u' = (u_1^1, \dots, u_n^r)$. Ist Ω eine nichtleere offene Teilmenge des $\mathbb{P}_n^r$, so sei R_Ω der Körper R , aufgefaßt als Unterring des Rings der meromorphen Funktionen auf $\mathbb{C}^n \times \Omega$. Der Isomorphismus $R \rightarrow R_\Omega$ werde mit β bezeichnet.

Es kann stets eine Hyperebene H des $\mathbb{P}_n$ gefunden werden, sodaß $f_A^{-1}(H)$ eine dünne analytische Teilmenge des $\mathbb{P}_n^r$ ist (Satz 2.0.2). Sei o.E.d.A. dieses H die unendlich ferne Ebene (was man durch eine lineare Koordinatentransformation stets erreichen kann).

Sei nun Ω speziell ein Gebiet in $\mathbb{P}_n^r \setminus f_A^{-1}(H)$, über dem die natürliche c -holomorphe Korrespondenz f_A in q verschiedene holomorphe Abbildungen $f_i: \Omega \rightarrow \mathbb{P}_n$ zerfällt

(vgl. Satz 1.2.1 und Satz 2.2.1 ; $f_A|_{\Omega} = \bigcup f_i$;
 $f_i(\Omega) \cap H = \emptyset$), und so, daß eine Darstellung $f_i(x) =$
 $= (1:f_{i1}(x):...:f_{in}(x))$ existiert mit holomorphen Funkti-
 onen f_{iv} auf Ω ($x \in \Omega$; $i = 1, \dots, q$; $v = 1, \dots, n$).

Die Größen $\vartheta_1^i := \sum_{v=1}^n f_{iv} \overset{\circ}{u}_v$ sind algebraisch über R_{Ω} ,
 weil die f_{iv} die (eindeutig bestimmten) Lösungsfunktionen
 des $f_A|_{\Omega}$ definierenden (nunmehr inhomogenen) algebrai-
 schen Gleichungssystems sind.

Es sei K_{Ω} der Erweiterungskörper von R_{Ω} , der durch
 Adjunktion der ϑ_1^i entsteht. In K_{Ω} zerfällt das Polynom
 $p' \in R_{\Omega}[\overset{\circ}{u}_0]$, das vermöge β von $p \in R[\overset{\circ}{u}_0]$ kommt, voll-
 ständig in die Linearfaktoren $\overset{\circ}{u}_0 + \vartheta_1^i$. Der Isomorphismus
 β werde nun kanonisch erweitert zu einem Isomorphismus
 $\tilde{\beta}: K \rightarrow K_{\Omega}$, wobei K ein geeigneter Erweiterungskörper
 von R ist. Damit zerfällt auch p in K in die Linear-
 faktoren $\overset{\circ}{u}_0 + \vartheta_1^i$, $\vartheta_1^i := \tilde{\beta}^{-1}(\vartheta_1^i) \in K$, $i = 1, \dots, q$.

Angenommen, der Grad von p wäre in irgendeiner der
 Variablen $\overset{\circ}{u}_0$, o.E. in $\overset{\circ}{u}_0$, nicht gleich q wählbar. Dann
 müßte p stets mehrfache Linearfaktoren besitzen. Ist A
 irreduzibel, so kann p irreduzibel gewählt werden und
 hat dann nur einfache Wurzeln, weil K , wie jeder Erwei-
 terungskörper eines rationalen Funktionenkörpers über $\mathbb{C}$,
 separabel ist. Ist A reduzibel, so zerlege man A in die
 irreduziblen Komponenten A_1 . Diese Zerlegung entspricht
 einer Zerlegung von p in Faktoren, die man als irreduzibel

annehmen darf. Da $\text{ord } A = \sum_1 \text{ord } A_i$ gilt, folgt aus obigem Argument, daß der Grad von p (Summe der Grade der Faktoren) gleich $q = \sum_1 \text{ord } A_i$ gewählt werden kann.

Also ist der Grad von p in jeder der Variablen u_o^σ , und wegen der Homogenität von p in jeder (Poly-)Variablen u^σ zu q wählbar.

Ist die Wahl so getroffen, so ist das Polynom p bis auf einen konstanten Faktor eindeutig bestimmt. Es werde dann mit p_A bezeichnet (man faßt p_A am besten als Element von $\mathbb{P}_q$ auf; vgl. w.u.). Aus der Eindeutigkeit folgt nun auch die Symmetrie von p_A , weil Gg_A symmetrisch ist.

////

Definition 2.3.1: Das solchermaßen bis auf einen konstanten Faktor eindeutig durch die reindimensionale analytische Menge A bestimmte homogene Polynom p_A heißt

Cayley-Form von A .

////

Die Zahlen $r \geq 0$ und $q \geq 1$ werden von nun an in ihrer Bedeutung festgehalten.

Sei $\mathbb{P}_q$ die Menge der $(r+1)$ -fach homogenen Polynome $\neq 0$, vom Grad q in jeder der $r+1$ (Poly-)Variablen u^ρ modulo konstanter Faktoren, und sei $N := \binom{n+q}{n}^{r+1} - 1$.

Es gibt eine bijektive Zuordnung

$$p: \mathbb{P}_N \rightarrow \mathbb{P}_q, \quad c \mapsto p_c,$$

sodaß das Element p_c von $\mathbb{P}_q$ die Gestalt (modulo konst. Fakt.) $p_c(u_o^o, \dots, u^r) = \sum_i c_i u_o^{o_1} \dots u^{r_{i1}}$ hat, wobei die $v_{\rho 1}$

in geeigneter Weise die Polyindizes $v \in \mathbb{N}^{n+1}$ mit $|v| = q$ durchlaufen. Es werde von nun an eine solche Zuordnung, und damit die entsprechende Durchlaufung (Numerierung der Monome) fest gewählt.

Ist p_A eine Cayleyform, so werde ihr inverses Bild $p^{-1}(p_A)$ mit c_A bezeichnet.

Satz 2.3.2: Ist A eine rein r -dimensionale analytische Menge des $\mathbb{P}_n$, und ist p_A die zu A gehörige Cayleyform, so ist für alle $y \in \mathbb{P}_n$

$$y \in A \Leftrightarrow \forall v \in \delta_{r+1}^{-1}(y): p_A(v) = 0.$$

Beweis: Sei $y \in A$, $v \in \delta_{r+1}^{-1}(y)$, $v = (\overset{0}{v}, v')$, $v' \in \mathbb{P}_n^r$, $\overset{0}{v} \in \mathbb{P}_n$. Es ist $y \in A \cap \delta_r(v') = f_A(v')$ und $y \in \delta(\overset{0}{v})$, also $\overset{0}{v} \in \delta(y)$, und daher $\overset{0}{v} \in \delta(f_A(v')) = g_A(v')$. Daraus folgt $v \in Gg_A$ und $p_A(v) = 0$.

Ist andererseits $y \notin A$, so gibt es nach Satz 2.0.2 $r+1$ Hyperebenen, etwa $\delta(\overset{0}{v}), \dots, \delta(\overset{r}{v})$, durch y , d.h. $y \in \delta_{r+1}(v)$, wenn man $v' := (\overset{1}{v}, \dots, \overset{r}{v})$, $v := (\overset{0}{v}, v')$ setzt, derart, daß $\emptyset = A \cap \delta(\overset{0}{v}) \cap \dots \cap \delta(\overset{r}{v}) = f_A(v') \cap \delta(\overset{0}{v})$. Daraus folgt $\overset{0}{v} \notin \delta^{-1}(f_A(v')) = \delta \circ f_A(v')$ und $v \notin Gg_A$, also $p_A(v) \neq 0$. ////

Definition 2.3.3: Es gelten die Vereinbarungen von S. 60. Damit sei die Korrespondenz

$\tilde{\lambda}: \mathbb{P}_N \rightarrow \mathbb{P}_n$ definiert durch $\tilde{\lambda}(c) :=$

$$\{y \in \mathbb{P}_n: \forall v \in \delta_{r+1}^{-1}(y): p_C(v) = 0\}.$$
 ////

Satz 2.3.3: Die Korrespondenz $\tilde{\lambda}$ ist c-holomorph.

Ist A eine rein r -dimensionale analytische Menge des $\mathbb{P}_n$ der Ordnung q , so ist $A = \tilde{\lambda}(c_A)$. (Für r, q, c_A siehe S. 60).

Beweis: Sei $y \in \mathbb{P}_n$. Jede Hyperebene des $\mathbb{P}_n$, die durch y geht, läßt sich schreiben als $\delta(S \cdot y)$ mit einer geeigneten schiefsymmetrischen Matrix S , genauer:

Zu jedem $v = (v_0 : \dots : v_n) \in \mathbb{P}_n$ mit $y \in \delta(v)$ gibt es ([27]) eine schiefsymmetrische Matrix $S = (s_{ik})$ mit

$v = (\sum_k s_{0k} v_k : \dots : \sum_k s_{nk} v_k)$. Und umgekehrt! Ist S eine schiefsymmetrische Matrix, so ist entweder $S \cdot y$ der Nullvektor des $\mathbb{C}^{n+1}$ oder mit $v := S \cdot y$ (s.o.) gilt

$y \in \delta(v)$; denn $(y \cdot v) = y \cdot S \cdot y = 0$. Sei $\mathcal{S}$ die Menge der schiefsymmetrischen $(n+1) \times (n+1)$ -Matrizen.

Es ist $\tilde{\lambda}(c) = \{y \in \mathbb{P}_n : \forall S_0, \dots, S_r \in \mathcal{S} : p_c(S_0 y, \dots, S_r y) = 0\}$. Auf diese Weise ist $\tilde{\lambda}$ als Durchschnitt G-analytischer, also c-holomorpher Korrespondenzen dargestellt, also ist $\tilde{\lambda}$ nach Satz 0.2.4 c-holomorph.

Die zweite Aussage folgt unmittelbar aus Satz 2.3.2, nach welchem $A = \{y \in \mathbb{P}_n : \forall v \in \delta_{r+1}^{-1}(y) : p_A(v) = 0\} = \tilde{\lambda}(c_A)$ ist ($p_{c_A} = p_A$ per def.).

Definition 2.3.4: Die Korrespondenz

$\text{rel} : \mathbb{P}_N \dashrightarrow \mathbb{P}_n^r \times \mathbb{P}_n^q$ sei definiert durch $\text{rel}(c) := \{(u', y) \in \mathbb{P}_n^r \times \mathbb{P}_n^q : \exists \rho \in \mathbb{C} : \forall \overset{0}{u} \in \mathbb{P}_n : p_c(\overset{0}{u}, u') = \rho \cdot (\overset{0}{u} \cdot \overset{1}{y}) \dots (\overset{0}{u} \cdot \overset{q}{y}), y = (\overset{1}{y}, \dots, \overset{q}{y})\}$.

Satz 2.3.4: Die Korrespondenz rel ist c-holomorph.

Beweis: Hierzu definiere man durch Koeffizientenvergleich: a) die "elementarsymmetrischen Polynome" ε_v durch die Gleichung

$$\sum_{|v|=q} \varepsilon_v(\overset{1}{y}, \dots, \overset{q}{y}) \cdot \overset{0}{u}^v = \prod_{i=1}^q (\overset{0}{u} \cdot \overset{1}{y}_i) \quad (\text{identisch in } \overset{0}{u})$$

b) die Polynome φ_v durch die Gleichung

$$\sum_{|v|=q} \varphi_v(c, \overset{1}{u}, \dots, \overset{r}{u}) \cdot \overset{0}{u}^v = p_c(\overset{0}{u}, \dots, \overset{r}{u}) \quad (\text{id. in } \overset{0}{u}).$$

Die Polynome ε_v sind homogen in jeder (Poly-)Variablen $\overset{1}{y}$, die φ_v in jeder $c, \overset{1}{u}, \dots, \overset{r}{u}$.

Wie sogleich nachgewiesen werden wird, gilt die Beziehung $\text{rel}(c) = \{(u', y) \in \mathbb{P}_n^r \times \mathbb{P}_n^q : \forall v, \mu \in \mathbb{N}^{n+1}, |v| = |\mu| = q : \varphi_v(c, u') \cdot \varepsilon_\mu(y) = \varphi_\mu(c, u') \cdot \varepsilon_v(y)\}$, also ist der Graph von rel , $G(\text{rel})$, durch ein (homogenes) algebraisches Gleichungssystem definiert, somit analytisch, und rel ist c-holomorph.

Zum Nachweis obiger Beziehung:

" $\Rightarrow$ " Ist für alle $v, \mu \in \mathbb{N}^{n+1}$ mit $|v| = |\mu| = q$

$\varphi_v(c, u') \cdot \varepsilon_\mu(y) = \varphi_\mu(c, u') \cdot \varepsilon_v(y)$, so folgt durch Multiplikation mit $\overset{0}{u}^v$ und Aufsummieren über v aus den Definitionen: $\forall \mu \in \mathbb{N}^{n+1}, |\mu| = q :$

$$\varepsilon_\mu(y) \cdot p_c(\overset{0}{u}, u') = \varphi_\mu(c, u') \cdot (\overset{0}{u} \cdot \overset{1}{y}_1) \cdot \dots \cdot (\overset{0}{u} \cdot \overset{q}{y}_q) \quad (\text{ident. in } \overset{0}{u}).$$

Angenommen, $\varepsilon_\mu(y)$ wäre Null für alle μ . Dann folgt $\varphi_\mu(c, u') = 0$ für alle μ ; denn es gibt sicher ein $\tilde{u}$ in $\mathbb{P}_n$, sodaß $(\tilde{u} \cdot \overset{1}{y}_1) \cdot \dots \cdot (\tilde{u} \cdot \overset{q}{y}_q)$ nicht verschwindet. Daraus ergibt sich $p_c(\overset{0}{u}, u') = \sum \varphi_\mu(c, u') \cdot \overset{0}{u}^\mu = 0$, also

$(u', y) \in \text{rel}(c)$, weil $\rho = 0$ gewählt werden kann. Andernfalls ist $\varepsilon_\kappa(y) \neq 0$ für ein $\kappa \in \mathbb{N}^{n+1}$ mit $|\kappa| = q$.

Dann ist mit $\rho := \varphi_\kappa(c, u') / \varepsilon_\kappa(y)$

$$p_c(\overset{\circ}{u}, u') = \rho \cdot (\overset{\circ}{u} \cdot \overset{\circ}{y}) \cdots (\overset{\circ}{u} \cdot \overset{\circ}{y}^q), \text{ also } (u', y) \in \text{rel}(c).$$

" $\subset$ " Ist $p_c(u) = \rho \cdot (\overset{\circ}{u} \cdot \overset{\circ}{y}) \cdots (\overset{\circ}{u} \cdot \overset{\circ}{y}^q)$ identisch in $\overset{\circ}{u}$, so folgt durch Vergleich nach Koeffizienten bei $\overset{\circ}{u}^v$:

$$\varphi_v(c, u') = \rho \cdot \varepsilon_v(y), \quad v \in \mathbb{N}^{n+1}, \quad |v| = q.$$

Für $\rho = 0$ folgt trivial, für $\rho \neq 0$ durch wechselseitiges Multiplizieren die Gleichung

$$\varepsilon_\mu(y) \cdot \varphi_v(c, u') = \varepsilon_v(y) \cdot \varphi_\mu(c, u') \quad \text{für alle } v, \mu \in \mathbb{N}^{n+1} \\ \text{mit } |v| = |\mu| = q. \quad \text{////}$$

Definition 2.3.5: Die Korrespondenz Λ

$$\Lambda: \mathbb{P}_N^r \multimap \mathbb{P}_N^r \times \mathbb{P}_N^q \text{ sei gegeben durch } \Lambda(c) := \\ = (\mathbb{P}_N^r \times \tilde{\chi}^q(c)) \cap G(\delta_r^q). \quad \text{////}$$

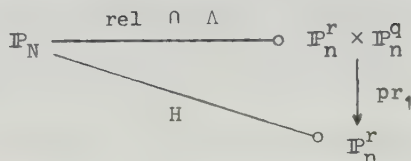
Λ ist der Durchschnitt zweier c -holomorpher Korrespondenzen: Der konstanten Korrespondenz $\tilde{C}: \mathbb{P}_N^r \multimap \mathbb{P}_N^r \times \mathbb{P}_N^q$ mit Bild $G(\delta_r^q)$ (letzterer Term steht für den Graph der q -fachen Verbindung von δ_r mit sich selbst), und der Korrespondenz $(C^*, \tilde{\chi}^q)$, Verbindung der konstanten Korr. $C^*: \mathbb{P}_N^r \multimap \mathbb{P}_N^r$ (mit ganz $\mathbb{P}_N^r$ als Bild) mit der q -fachen Verbindung von $\tilde{\chi}$ mit sich selbst. Daher wegen Satz 0.2.4

Satz 2.3.6: Die Korrespondenz Λ ist c -holomorph.

////

Definition 2.3.6: Die Korrespondenz $H: \mathbb{P}_N^r \multimap \mathbb{P}_N^r$

sei definiert durch $H := \text{pr}_1 \circ (\text{rel} \cap \Lambda)$, im Diagramm:



////

Definition 2.3.7: Sei H die soeben definierte Korrespondenz, n, r, N wie auf S. 60. Dann sei

$$\text{Ch}(r, q; \mathbb{P}_N) := \{c \in \mathbb{P}_N : H(c) = \mathbb{P}_n^r\} , \text{ dafür kurz}$$

$\text{Ch}(r, q)$. Diese Teilmenge des $\mathbb{P}_N$ heißt die

Chow-Varietät (bzgl. des $\mathbb{P}_N$) zur Dimension r und zur Ordnung q .

////

Dieser Name ist gerechtfertigt durch folgenden

Satz 2.3.7: Die Korrespondenz H ist c-holomorph.

$\text{Ch}(r, q)$ ist eine analytische Teilmenge, also eine algebraische Teilvariett des $\mathbb{P}_N$. Ein Element γ des $\mathbb{P}_N$ ist genau dann in $\text{Ch}(r, q)$, wenn für alle $u' \in \mathbb{P}_n^r$ ein $y = (\overset{1}{y}, \dots, \overset{q}{y}) \in \mathbb{P}_n^q$ existiert, sodaß folgende drei Bedingungen erfüllt sind:

- a) $\exists \rho \in \mathbb{C} \forall \overset{o}{u} \in \mathbb{P}_n : p_\gamma(\overset{o}{u}, u') = \rho \cdot \prod_{i=1}^q (\overset{o}{u} \cdot \overset{i}{y})$
- b) $\overset{1}{y}, \dots, \overset{q}{y} \in \delta_r(u')$
- c) $\overset{1}{y}, \dots, \overset{q}{y} \in \tilde{\chi}(\gamma)$.

Beweis: Die Korrespondenz $\text{rel} \cap \Lambda$ ist nach Satz 0.2.4 c-holomorph, also auch H nach Satz 0.2.3 .

Offenbar ist $\text{Ch}(r,q) = \{c \in \mathbb{P}_N : \dim H(c) \geq n \cdot r\}$, und ist daher nach Satz 2.0.3 eine analytische, also nach dem Satz von Chow eine algebraische Teilmenge des $\mathbb{P}_N$.

Die letzte Aussage ist eine direkte logische Folgerung aus den Definitionen von H , rel , Δ und $\text{Ch}(r,q)$.////

Definition 2.3.8: $\lambda := \tilde{\lambda}|_{\text{Ch}(r,q)} \rightarrow \mathbb{P}_n$. ////

Satz 2.3.8: Die Korrespondenz $\lambda: \text{Ch}(r,q) \rightarrow \mathbb{P}_n$ ist c-holomorph.

Für alle $\gamma \in \text{Ch}(r,q)$ ist $\lambda(\gamma)$ eine rein r-dimensionale analytische Menge des $\mathbb{P}_n$, deren Ordnung zwischen 1 und q liegt.

Zu jeder rein r-dimensionalen analytischen Menge A des $\mathbb{P}_n$ der Ordnung q gibt es genau ein $\gamma \in \text{Ch}(r,q)$ mit $A = \lambda(\gamma)$. (Dieses γ heißt "Chow-Koordinate" von A).

Beweis: a) λ ist c-holomorph als Beschränkung von $\tilde{\lambda}$ auf den komplexen Raum $\text{Ch}(r,q)$ (Def. 2.3.3/8).

b) Sei $\gamma \in \text{Ch}(r,q)$ und $A := \lambda(\gamma)$; für p_γ siehe S. 60. Die Korrespondenz $g_\gamma: \mathbb{P}_n^r \rightarrow \mathbb{P}_n$ sei definiert durch $g_\gamma(u') := \{\tilde{u} \in \mathbb{P}_n : p_\gamma(\tilde{u}, u') = 0\}$; sie ist offenbar c-holomorph.

Es ist $g_A = g_\gamma$:

"c" folgt leicht aus der Definition von $\tilde{\lambda}$ bzw. λ (vgl. Def. 2.3.3/8), weil $\tilde{u} \in g_A(u') \Leftrightarrow \lambda(\gamma) \cap \delta_{r+1}(\tilde{u}, u') \neq \emptyset$ ist (vgl. die Darstellung von Gg_A im Beweis von Satz 2.2.1e, S. 54). Aus Def. 2.3.3 folgt dann $p_\gamma(\tilde{u}, u') = 0$,

also $\overset{\circ}{u} \in g_Y(u')$.

Für die andere Inklusion braucht man wesentlich, daß γ in $\text{Ch}(r, q)$ liegt. Nach Satz 2.3.7 gilt für $u' \in \mathbb{P}_n^r$ entweder $\forall \overset{\circ}{u} \in g_Y(u') \exists y \in \mathbb{P}_n: (\overset{\circ}{u} \cdot y) = 0, y \in \delta_r(u'),$

$y \in \tilde{\lambda}(\gamma)$ (Def. von g_Y durch p_Y) oder aber ($\rho = 0$), daß $p_Y(\overset{\circ}{u}, u') = 0$ identisch in $\overset{\circ}{u}$ ist. Nach Satz 2.0.3

ist die Menge $\{u': \dim g_Y(u') \geq n\}$ analytisch in $\mathbb{P}_n^r$; sie ist dünn, weil andernfalls p_Y das Nullpolynom wäre.

Also gilt für alle u' aus der offenen dichten Menge

$\Omega := \{u' \in \mathbb{P}_n^r: \dim g_Y(u') < n\}$: Ist $\overset{\circ}{u} \in g_Y(u')$, so ist $\{y \in \mathbb{P}_n: (\overset{\circ}{u} \cdot y) = 0, y \in \delta_r(u'), y \in \lambda(\gamma)\} \neq \emptyset$, also wegen $A = \lambda(\gamma) = \tilde{\lambda}(\gamma)$ und der Def. von g_A $\overset{\circ}{u} \in g_A(u')$;

daher $g_Y|_{\Omega} \subset g_A|_{\Omega}$. Durch Abschließung im Graph folgt

$\dot{g}_Y \subset g_A \subset g_Y$. Ist $\dot{A}$ die Vereinigung der rein r -dimensionalen irreduziblen Komponenten von A , so ist nach Satz 2.2.1 $\dot{g}_A = g_{\dot{A}}$, also $\dot{g}_Y = g_{\dot{A}}$. (Vgl. Def. 0.2.3.)

g_Y ist natürlich ($g_Y = \dot{g}_Y$): Sei p' der größte Faktor von p_Y , dessen Nullstellengebilde dünn auf $\mathbb{P}_n^r$ projiziert wird (Produkt der entsprechenden irreduziblen Faktoren, Existenz nach Satz 0.2.6), und sei $\dot{p}$ das Produkt der übrigen Faktoren von p_Y . Nach Satz 2.3.7a ist $\dot{p}$ mit p_Y vom Grad q in $\overset{\circ}{u}$, denn p' hängt aus Dimensionsgründen von $\overset{\circ}{u}$ nicht ab. Eine Zerlegung von $\dot{p}$ in irreduzible Faktoren (entsprechend den irreduziblen Komponenten von $g_{\dot{A}}$, die alle symmetrisch sind, vgl. Satz 2.2.1) zeigt, daß auch in den übrigen Variablen $\dot{p}$ vom Grad q

ist. Also ist p' ein konstanter Faktor, weil $p_\gamma = \dot{p} \cdot p'$ ist. Da $\dot{g}_\gamma$ das Nullstellengebilde von $\dot{p}$ als Graph hat (nach Konstr.), ist $g_\gamma = \dot{g}_\gamma = \dot{g}_A$ gezeigt.

$A = \dot{A}$: Dies folgt aus $g_A \subset g_\gamma = \dot{g}_A$ nach Satz 2.2.1 .

Also ist $A = \lambda(\gamma)$ rein r -dimensional, und weil nun $g_\gamma = g_A$ gezeigt ist, folgt aus Satz 2.3.7a , daß die Bildmengen von $g_A|_\Omega$ Vereinigungen von höchstens q verschiedenen Hyperebenen sind; daher $1 \leq \text{ord } \lambda(\gamma) \leq q$ (Def. 2.2.2).

c) Sei nun A eine rein r -dimensionale analytische Menge des $\mathbb{P}_n$ der Ordnung q . Behauptet wird Existenz und Eindeutigkeit der "Chowkoordinate" $\gamma \in \text{Ch}(r, q)$, für die $A = \lambda(\gamma)$ ist.

Existenz: Sei p_A die Cayleyform von A (Satz 2.3.1) und $c_A \in \mathbb{P}_N$ das Koeffiziententupel von p_A (vgl. S. 60). Nach Satz 2.3.3 ist $\tilde{\lambda}(c_A) = A$, bleibt also nur nachzuweisen, daß c_A in $\text{Ch}(r, q)$ liegt, daß also die Punkte a), b) und c) von Satz 2.3.7 erfüllt sind. Sei Ω' die offene und dichte Menge der u' , für die $\dim f_A(u') = 0$ ist (vgl. Ω aus Satz 2.2.6). Für u' aus Ω' zerfällt $p_A(\overset{0}{u}, u')$ als Polynom in $\overset{0}{u}$ in q Linearfaktoren $(\overset{0}{u} \cdot \overset{1}{y})$ mit nicht notwendig verschiedenen $\overset{1}{y} \in \mathbb{P}_n$, also $p(\overset{0}{u}, u') = \rho \cdot \Pi(\overset{0}{u} \cdot \overset{1}{y})$ mit einem $\rho \in \mathbb{C}^*$, da $g_A(u')$ eine Vereinigung von Hyperebenen ist. Für $u' \notin \Omega'$ ist $g_A(u') = \mathbb{P}_n$, also ist $p_A(\overset{0}{u}, u') = 0$ identisch in $\overset{0}{u}$. Damit ist Punkt a) von Satz 2.3.7 gezeigt (für $u' \notin \Omega'$ mit $\rho := 0$). Die Punkte b) und c) sind erfüllt, weil die $\overset{1}{y}$ in $f_A(u')$ liegen und

$A = \tilde{\lambda}(c_A)$ ist.

Eindeutigkeit: Ist $\gamma \in \text{Ch}(r, q)$ und $A = \lambda(\gamma)$, so ist $g_A = g_\gamma$ (Teil a), also haben p_A und p_γ dasselbe Nullstellengebilde und denselben Grad (vgl. Def. 2.3.1 und Satz 2.3.1), also sind die beiden Polynome bis auf einen konstanten Faktor gleich, somit folgt $\gamma = c_A$. ////

Definition 2.3.9: Für beliebige Teilmengen $A \subset \mathbb{P}_n$ sei gesetzt $\text{Ch}(r, q; A) := \{\gamma \in \text{Ch}(r, q) : \lambda(\gamma) \subset A\}$. ////

Satz 2.3.9: Ist A eine analytische Teilmenge des $\mathbb{P}_n$, so ist $\text{Ch}(r, q; A)$ eine analytische Teilmenge von $\text{Ch}(r, q)$.

Beweis: Man bilde dazu $\tilde{\lambda}_A := \tilde{\lambda} \cap C_A$ (mit der konstanten Korrespondenz C_A), Λ_A vermöge der Zuordnung $c \mapsto (\mathbb{P}_n^r \times \tilde{\lambda}_A^q(c)) \cap G(\delta_r^q)$ und $H_A := \text{pr}_1 \circ (\text{rel} \cap \Lambda_A)$ (in völliger Analogie zu den Def. 2.3.3/4/5/6; vgl. besonders die Erklärung zu Def. 2.3.5).

Es gilt $\text{Ch}(r, q; A) = \{\gamma \in \text{Ch}(r, q) : H_A(\gamma) = \mathbb{P}_n^r\}$: Denn ist $\gamma \in \text{Ch}(r, q; A)$, so sind die Punkte a), b) und c) von Satz 2.3.7 erfüllt, zusammen mit der Beziehung $\tilde{\lambda}(\gamma) \subset A$, aus welcher folgt, daß die $\tilde{y}$ alle schon in A liegen. Daraus folgt durch einfache logische Umformung $H_A(\gamma) = \mathbb{P}_n^r$.

Ist andererseits diese Gleichheit gegeben, so ist daraus $\lambda(\gamma) \subset A$ abzuleiten. Da $\lambda(\gamma)$ nach Satz 2.3.8 rein r -dimensional ist, gibt es zu jedem Punkt $y \in \lambda(\gamma)$ ein $u' \in \delta_r^{-1}(y)$, sodaß y in $\delta_r(u') \cap \lambda(\gamma)$ isoliert liegt

(d.h. es gibt r Hyperebenen, deren Durchschnitt in einer Umgebung nur den Punkt y mit $\lambda(y)$ gemeinsam hat; vgl. [13]). Dann ist $(\tilde{u} \cdot y)$ ein Linearfaktor von $p_y(\tilde{u}, u')$, sodaß y in A enthalten ist, wie man aus der Voraussetzung $H_A(\gamma) = \mathbb{P}_n^r$ ($y \in A \cap \tilde{\lambda}(\gamma)$) abliest. Also ist $\lambda(\gamma) \subset A$.

Also kann man $\text{Ch}(r, q; A)$ auch schreiben als $\{\gamma \in \text{Ch}(r, q) : \dim H_A(\gamma) \geq n \cdot r\}$, und diese Menge ist nach Satz 2.0.3 analytisch (in $\text{Ch}(r, q)$ und $\mathbb{P}_N$). ////

Satz 2.3.10: Ist $k: X \rightarrow \mathbb{P}_N$ eine c -holomorphe Korrespondenz, so gibt es eine c -holomorphe Korrespondenz $H_k: X \times \mathbb{P}_N \rightarrow \mathbb{P}_n^r$, sodaß für alle $(x, c) \in X \times \mathbb{P}_N$:

$$H_k(x, c) = \mathbb{P}_n^r \Leftrightarrow c \in \text{Ch}(r, q) \wedge \lambda(c) \subset k(x) \quad (\text{oder, gleichwertig, } c \in \text{Ch}(r, q; k(x))).$$

(Für r, q, N vgl. S. 60.)

Beweis: Zur Konstruktion von H_k seien folgende Korrespondenzen definiert: $\lambda_k: X \times \mathbb{P}_N \rightarrow \mathbb{P}_n$ durch $(x, c) \mapsto \tilde{\lambda}(c) \cap k(x)$ (c -holomorph nach Satz 0.2.4); $\Lambda_k: X \times \mathbb{P}_N \rightarrow \mathbb{P}_n^r \times \mathbb{P}_n^q$ durch $(x, c) \mapsto \left(\mathbb{P}_n^r \times (\lambda_k(x, c))^q \right) \cap G(\delta_r^q)$ (mit λ_k c -holomorph; vgl. Def. 2.3.5); schließlich werde die triviale Fortsetzung der Korrespondenz rel auf den Produktraum $X \times \mathbb{P}_N$ mit dem selben Symbol bezeichnet, also $\text{rel}: X \times \mathbb{P}_N \rightarrow \mathbb{P}_n^r \times \mathbb{P}_n^q$ (vgl. Def. 2.3.4).
Damit sei nun $H_k := \text{pr}_1 \circ (\text{rel} \cap \Lambda_k)$ (vgl. Def. 2.3.6).

Die behauptete Äquivalenz gilt punktweise für $x \in X$,
denn es ist $\lambda_k(x, c) = \tilde{\lambda}_{k(x)}(c)$ und somit $H_k(x, c) =$
 $H_{k(x)}(c)$ mit den Bezeichnungen von Satz 2.3.9 (Beweis).

////

Definition 2.3.10: Ist $k: X \rightarrow \mathbb{P}_n$, so sei

$k_{r,q}: X \rightarrow \text{Ch}(r, q)$ definiert durch

$$x \mapsto \{\gamma \in \text{Ch}(r, q): \lambda(\gamma) \subset k(x)\} .$$

////

Satz 2.3.11: Ist $k: X \rightarrow \mathbb{P}_n$ eine c-holomorphe Korrespondenz, so ist auch jede der Korrespondenzen $k_{r,q}$ von Definition 2.3.10 c-holomorph.

Beweis: Aus Satz 2.3.10 folgt $G(k_{r,q}) =$
 $= \{(x, \gamma) \in X \times \text{Ch}(r, q): H_k(x, \gamma) = \mathbb{P}_n^r\}$. Diese Menge ist
nach Satz 2.0.3 und dem nunmehr bekannten Dimensionsargument
analytisch, also ist $k_{r,q}$ nach Satz 0.2.4 c-holomorph.

////

Es ist stets $\lambda \circ k_{r,q} \subset k$, und $k_{r,q}$ ist die größte
(bzgl. Inklusion) Korrespondenz in $\text{Ch}(r, q)$, die diese
Relation erfüllt. Ein einfaches Kriterium für Gleichheit
ist folgende

Aussage 2.3.12: Genau dann ist $\lambda \circ k_{r,q} = k$, wenn für
alle $x \in X$ die Menge $k(x)$ darstellbar ist als eine Ver-
einigung von solchen Teilmengen des $\mathbb{P}_n$, die als Bilder von
 $\lambda: \text{Ch}(r, q) \rightarrow \mathbb{P}_n$ auftauchen (als solche sind zu nennen:

Die rein r -dimensionalen Mengen der Ordnung q ; die Vereinigungen von rein r -dimensionalen Mengen mit Ordnungen q_1 , sodaß $\sum n_1 \cdot q_1 = q$ mit geeigneten $n_1 \in \mathbb{N}^*$). ////

Definition 2.3.11: Es werde gesetzt:

$\text{Ch}'(r, q) := \{\gamma \in \text{Ch}(r, q) : \text{ord } \lambda(\gamma) < q\}$, und allgemeiner für $p \in \mathbb{N}^*$, $1 \leq p < q$:

$\text{Ch}_p(r, q) := \{\gamma \in \text{Ch}(r, q) : \text{ord } \lambda(\gamma) \leq p\}$. ////

Satz 2.3.13: Für alle $p \in \mathbb{N}^*$, $1 \leq p < q$ ist die Menge $\text{Ch}_p(r, q)$ analytisch in $\text{Ch}(r, q)$.

Beweis: Für $\rho = 1, \dots, q$ sei $\varphi_\rho : \text{Ch}(r, \rho) \rightarrow \text{Ch}(r, q)$ die nach Def. 2.3.10 zur kanonischen Korrespondenz

$\lambda : \text{Ch}(r, \rho) \rightarrow \mathbb{P}_n$ gebildete Korrespondenz $\lambda_{r, q}$.

Aus Satz 2.3.8 folgt (vgl. die Definitionen)

$\text{Ch}_p(r, q) = \bigcup_{\rho=1}^p \text{Bild } \varphi_\rho$, und die Behauptung folgt dann aus Satz 0.2.1 und der Feststellung, daß die φ_ρ eigentliche c -holomorphe Korrespondenzen sind. ////

Damit ist man nun in den Stand gesetzt, die Hauptaussage dieses Kapitels zu beweisen.

Satz 2.3.14: Sei X ein irreduzibler komplexer Raum, $k : X \rightarrow \mathbb{P}_n$ eine natürliche c -holomorphe Korrespondenz, und Ω eine nichtleere offene Teilmenge von X , sodaß für alle $x \in \Omega$ die analytische Menge $k(x)$ rein r -di-

mensional und von der Ordnung q ist.

Dann existiert genau eine meromorphe Abbildung

$k': X \rightarrow \text{Ch}(r, q)$ mit $k = \lambda \circ k'$; im Diagramm

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{k'} & \text{Ch}(r, q) \\ & \searrow k & \downarrow \lambda \\ & & \circ \\ & & \mathbb{P}_n \end{array}$$

Beweis: Sei $\Omega' := \{x \in \Omega : x \text{ ist gewöhnlicher Punkt von } X \text{ und } k_{r,q}(x) = (k_{r,q})^*(x)\}$ (vgl. Def. 2.3.10/0.2.). Nach Satz 0.2.6 ist Ω' dicht in Ω und $k_{r,q}|_{\Omega}$ natürlich.

Wegen der Eindeutigkeit der Chowkoordinate (Satz 2.3.8) ist für alle $x \in \Omega$ die Menge $k_{r,q}(x) \setminus \text{Ch}'(r, q)$ einpunktig. Damit ist $f' := k_{r,q}|_H$ eine Abbildung in $H := \text{Ch}(r, q) \setminus \text{Ch}'(r, q)$. Sei $f: \Omega' \rightarrow \text{Ch}(r, q)$ definiert mittels Inklusion von H in $\text{Ch}(r, q)$.

f ist holomorph: Da f' G -analytisch ist und Ω' maximale Struktur trägt (sogar Mannigf.-Str.) reicht es zu zeigen, daß f oder f' stetig oder, gleichwertig, daß $\check{f}$ offen ist.

Für jede irreduzible Komponente $\tilde{K}$ von $k_{r,q}|_{\Omega'}$ gilt $\dim G_K \geq \dim X$, weil $\check{K}$ surjektiv (nach Def. von Ω' ist $k_{r,q}|_{\Omega'}$ natürlich) und eigentlich-holomorph ist. Dann ist für alle $z \in G_f$ $\dim_z G_f \geq \dim X$, weil G_f offen in $G_{k_{r,q}}$ ist. Da $\check{f}$ eine diskrete holomorphe Abbildung ist, folgt aus bekannten Sätzen ([19], vgl. auch [18]), daß $\check{f}$ offen ist.

Nun kann man Satz 0.3.1 auf $k_{r,q}$ anwenden:

X ist irreduzibel und Ω' kann zu einem irreduziblen Gebiet verkleinert werden. In f hat man eine holomorphe Abbildung $\Omega' \rightarrow \text{Ch}(r,q)$ mit $f \in k_{r,q}|\Omega'$. Wählt man für g (aus Satz 0.3.1) die konstante G -analytische Korrespondenz auf X mit Bild $\text{Ch}'(r,q)$, so gilt $f \notin g$ und $k_{r,q}|\Omega' \subset f \cup g|\Omega'$. Damit sind alle Voraussetzungen von Satz 0.3.1 erfüllt, und es gibt demnach eine meromorphe Abbildung $k': X \rightarrow \text{Ch}(r,q)$ mit den Eigenschaften $k' \in k_{r,q}$ und $k'|\Omega' = f$.

Es folgt $\lambda \circ k'|\Omega' = \lambda \circ f = k|\Omega'$, und weil k natürlich ist, folgt aus dem Identitätssatz 0.2.7 $k \in \lambda \circ k'$. Aus $k' \in k_{r,q}$ folgt $\lambda \circ k' \in \lambda \circ k_{r,q} = k$ (vgl. Aussage 2.3.12), also $k = \lambda \circ k'$.

Die Eindeutigkeit von k' folgt aus dem Identitätssatz für meromorphe Abbildungen, da k' auf Ω festliegt.////

Korollar 1: Seien X , Ω , r und q wie in Satz 2.3.14. Zu jeder c -holomorphen Korrespondenz $k: X \rightarrow \mathbb{P}_n$ mit auf Ω rein r -dimensionalen Bildern der Ordnung q existiert genau eine meromorphe Abbildung $k': X \rightarrow \text{Ch}(r,q)$ mit $\lambda \circ k' = k$. ////

Korollar 2: Seien für die natürliche c -holomorphe Korrespondenz $k: X \rightarrow \mathbb{P}_n$ über die Voraussetzungen des Satzes 2.3.14 hinaus noch folgende Bedingungen erfüllt:

- a) X besitzt maximale Struktur;
- b) für alle $x \in X$ ist $k(x)$ rein r -dimensional und

von der Ordnung q .

Dann existiert eine holomorphe Abbildung $\kappa: X \rightarrow \text{Ch}(r, q)$ mit $k = \kappa \circ \lambda$.

Beweis: Die meromorphe Abbildung k' aus Satz 2.3.14 ist in diesem Fall eine c-holomorphe Abbildung (vgl. Satz 2.3.8) und wegen der Voraussetzung an die Struktur von X eine holomorphe Abbildung. ////

§4 Zerlegung c-holomorpher Korrespondenzen

Satz 2.4.1: Sei $k: X \dashrightarrow Y$ eine volle irreduzible c-holomorphe Korrespondenz (X ist dann irreduzibel).

Dann gibt es $r \in \mathbb{N}$ und eine offene dichte Teilmenge Ω von X , sodaß für alle $x \in \Omega$ $k(x)$ rein r -dimensional ist.

Beweis: Mit den Bezeichnungen aus dem Beweis von Satz 2.0.3 sei r so gewählt, daß $\Sigma_r(k) = X$ und $\Sigma_{r+1}(k) \neq X$ ist. Diese Wahl ist möglich; denn nach Generalvoraussetzung ist Y lokal endlichdimensional, und da das irreduzible Bild k in einer irreduziblen Komponente von Y enthalten ist, ist die Dimension der Bilder von k beschränkt. Sei weiter $k_0: X \dashrightarrow Y$ definiert durch $Gk_0 := D_r(\check{k}) \subset Gk$. Aus $k_0 \subset k$ folgt nach Satz 0.2.4, daß k_0 c-holomorph ist, weil Gk_0 analytisch ist (2.0.3). k_0 ist voll, weil $\text{pr}_X^{D_r}(\check{k}) = \Sigma_r = X$ ist.

Sei $\Omega' := X \setminus \Sigma_{r+1}(k)$. Ω' ist offen und dicht in X

(Satz 2.0.3 , X irreduzibel). Für alle $x \in \Omega'$ ist $k_0(x)$ rein r -dimensional. Denn ist $y \in k(x)$, so ist $\dim_y k_0(x) \leq \dim_y k(x) \leq r$ ($k_0 \subset k$, $x \in \Omega'$), und aus $k_0(x) = \{y \in k(x) : \dim_y k(x) \geq r\}$ folgt, daß $k_0(x)$ genau aus den r -dimensionalen irreduziblen Komponenten von $k(x)$ besteht.

Nach Satz 0.2.6 gibt es eine offene dichte Menge $\Omega \subset \Omega' \subset X$, sodaß $k' := k_0|_{\Omega}$ natürlich ist. Dann folgt aus dem Korollar zu Lemma 2.2.5 $\dim Gk' = r + \dim X$. Für alle $x \in \Omega'$ ist $\dim k(x) \leq r$, also ist $\dim Gk \leq r + \dim X = \dim Gk'$. Da $k' \subset k|_{\Omega}$ ist, folgt, weil k irreduzibel ist, $k' = k|_{\Omega}$, und damit ist für alle $x \in \Omega$ $k(x) = k'(x) = k_0(x)$ rein r -dimensional.////

Definition 2.4.1: Sei X irreduzibel, $k: X \rightarrow Y$ eine natürliche c -holomorphe Korrespondenz.

Ist k irreduzibel, so sei $\dim k$ definiert als die Zahl r aus Satz 2.4.1 . Ansonsten sei $\dim k := \max \{ \dim \tilde{k} : \tilde{k} \text{ ist irreduz. Komp. von } k \}$, und für die leere Korrespondenz sei $\dim \emptyset := -1$ gesetzt.

k heiße rein, wenn alle irreduziblen Komponenten $\tilde{k}$ von k dieselbe "Dimension" $\dim \tilde{k}$ besitzen. ////

Nach Lemma 0.2.8 ist die Zahl $\dim k$ stets definiert und endlich. Es gilt $\dim k = \min \{ \dim k(x) : x \in X \}$ (Satz 2.0.3).

Eine natürliche c -holomorphe Korrespondenz $k: X \rightarrow Y$

(X irreduzibel) ist genau dann rein, wenn es eine nicht-leere offene Teilmenge Ω von X gibt, sodaß für alle $x \in \Omega$ $k(x)$ reindimensional ist. Ist k rein und $\dim k = \dim k(x)$, so ist $k(x)$ reindimensional ($x \in X$).

Satz 2.4.2: Sei X irreduzibel und $k: X \rightarrow \mathbb{P}_n$ eine reine c-holomorphe Korrespondenz.

Dann gibt es eine offene dichte Teilmenge Ω' von X und $q \in \mathbb{N}^*$, sodaß für alle $x \in \Omega'$ gilt $\text{ord } k(x) = q$.

Beweis: Mit den Bezeichnungen von Lemma 2.2.2 und $r := \dim k$ ist für jede irreduzible Komponente $\tilde{k}$ von k $\dim \tilde{k} = r$, also ist nach Satz 2.0.1 und Lemma 2.2.2 die Korrespondenz $\tilde{k}_r: X \times \mathbb{P}_n^r \rightarrow \mathbb{P}_n$ voll, irreduzibel und c-holomorph. Daher ist $k_r: X \times \mathbb{P}_n^r \rightarrow \mathbb{P}_n$ natürlich (man sieht leicht, daß die irreduziblen Komponenten von k_r die $\tilde{k}_r$ sind). Für wenigstens ein $(x, u) \in X \times \mathbb{P}_n^r$ ist $k_r(x, u) = k(x) \cap \delta_r(u)$ nulldimensional (2.0.1). Daher gibt es nach Satz 1.2.3 eine offene dichte Menge $\tilde{\Omega} \subset \Omega \times \mathbb{P}_n^r$ und $q \in \mathbb{N}^*$, sodaß $\text{card } k_r(x, u) = q$ ist für alle $(x, u) \in \tilde{\Omega}$.

Man setze nun $\Omega' := \text{pr}_X(\tilde{\Omega}) \subset X$ mit der offensichtlichen Projektion pr_X . Da pr_X surjektiv und offen ist, ist Ω' offen und dicht in Ω und X .

Für alle $x \in \Omega'$ ist $\text{ord } k(x) = q$: Denn nach Def. von k_r (2.2.2) ist $k_r(x, u) = f_{k(x)}(u)$ (vgl. Def. 2.2.1), und für alle $x \in \Omega'$ ist $\text{pr}_X^{-1}(x) \cap \tilde{\Omega}$ offen

und nichtleer in $\{x\} \times \mathbb{P}_n^r$, sodaß $\text{card } f_{k(x)}(u) = q$ für alle u einer nichtleeren offenen Teilmenge von $\mathbb{P}_n^r$ ist, womit wegen Satz 2.2.6 (und Def. 2.2.2) $\text{ord } k(x) = q$ gezeigt ist. ////

Definition 2.4.2: Ist X irreduzibel und

$k: X \dashrightarrow \mathbb{P}_n$ eine reine c-holomorphe Korrespondenz, so sei $\text{ord } k$ definiert als die Zahl q von Satz 2.4.2. Für die leere Korrespondenz werde $\text{ord } \emptyset := 0$ gesetzt. ////

Es gilt $\text{ord } k = \max \{ \text{ord } k(x) : X \text{ in } x \text{ irreduzibel, } \dim k(x) = \dim k \}$. Denn ist $\dim k(x) = \dim k$, so ist $k(x)$ reindimensional, also ist dort $\text{ord } k(x)$ definiert und kann nicht größer als $\text{ord } k$ werden (vgl. Beweis Satz 2.4.2, $\text{ord } k := q$).

Satz 2.4.3 (Korollar zu Satz 2.3.14): Ist X irreduzibel und $k: X \dashrightarrow \mathbb{P}_n$ eine reine c-holomorphe Korrespondenz, so gibt es eine meromorphe Abbildung

$k': X \rightarrow \text{Ch}(\dim k, \text{ord } k)$ mit $k = \lambda \circ k'$, und nur eine. ////

Satz 2.4.4: Sei X irreduzibel und $k: X \dashrightarrow Y$ eine natürliche c-holomorphe Korrespondenz.

Dann gibt es Zahlen $s, r_1, \dots, r_s \in \mathbb{N}$, $r_1 < \dots < r_s$, und reine c-holomorphe Korrespondenzen $\kappa_i: X \dashrightarrow Y$ mit $\dim \kappa_i = r_i$ ($i = 1, \dots, s$), sodaß $k = \bigcup_i \kappa_i$ ist.

Beweis: Ist k leer, so kann man $s = 0$ setzen. Ist k nicht leer, so gibt es nach Satz 2.4.1 eine irreduzible Komponente $\tilde{k}$ von k mit $\text{dib } k \geq 0$, und man setzt

$$r_1 := \min \{ \text{dib } \tilde{k} : \tilde{k} \text{ irred. Komp. von } k \}, \text{ sowie} \\ \kappa_1 := \bigcup \{ \tilde{k} : \tilde{k} \text{ irred. Komp. von } k, \text{ dib } \tilde{k} = r_1 \}.$$

Auf diese Weise verfährt man weiter, bis ganz k nach endlich vielen Schritten ausgeschöpft ist (Lemma 0.2.8). Die behaupteten Eigenschaften der κ_1 sind nun offensichtlich erfüllt. ////

Definition 2.4.3: Für alle $r \in \{0, \dots, n\}$, $q \in \mathbb{N}^*$ sind die Chow-Varietäten $\text{Ch}(r, q) = \text{Ch}(r, q; \mathbb{P}_n)$ und die zugehörigen kanonischen Korrespondenzen $\text{Ch}(r, q) \rightarrow \mathbb{P}_n$ wohldefiniert (2.3.7). Man setze noch $\text{Ch}(r, 0) := \{\cdot\}$ und kanonisch $\cdot \mapsto \emptyset$ fest.

Für $\bar{q} = (q_0, \dots, q_{n-1}) \in \mathbb{N}^n$ setze man $\text{Ch}(-, \bar{q}) := \text{Ch}(-, \bar{q}; \mathbb{P}_n) := \text{Ch}(0, q_0) \times \dots \times \text{Ch}(n-1, q_{n-1})$, n Faktoren ,
und $\lambda_{\bar{q}}: \text{Ch}(-, \bar{q}) \rightarrow \mathbb{P}_n$ für $\gamma = (\gamma_0, \dots, \gamma_{n-1})$,
 $\gamma_i \in \text{Ch}(i, q_i)$, durch $\lambda_{\bar{q}}(\gamma) := \lambda_0(\gamma_0) \cup \dots \cup \lambda_{n-1}(\gamma_{n-1})$
fest, wobei für den Augenblick $\lambda_1: \text{Ch}(1, q_1) \rightarrow \mathbb{P}_n$ die kanonischen Korrespondenzen bedeuten ($i = 0, \dots, n-1$).

Es sei weiter

$\text{Ch} := \text{Ch}(\mathbb{P}_n) := \{\cdot\} \cup \bigcup_{\bar{q} \in \mathbb{N}^n} \text{Ch}(-, \bar{q})$ der komplexe Summenraum (disjunkte Vereinigung), und die zugehörige kanonische Korrespondenz $\lambda: \text{Ch} \rightarrow \mathbb{P}_n$ definiert durch die Beschränkungen $\lambda|_{\text{Ch}(-, \bar{q})} := \lambda_{\bar{q}}$, sowie $\lambda(\cdot) := \mathbb{P}_n$. ////

Satz 2.4.5: Sei X irreduzibel. Zu jeder natürlichen c-holomorphen Korrespondenz $k: X \multimap \mathbb{P}_n$, $k \neq C_{\mathbb{P}_n}$, gibt es $\bar{q} \in \mathbb{N}^n$ und eine meromorphe Abbildung $k': X \rightarrow \text{Ch}(-, \bar{q})$ mit $k = \lambda_{\bar{q}} \circ k'$.

Beweis: Für $i = 0, \dots, n-1$ setze man $\kappa_i: X \multimap \mathbb{P}_n$ als $\bigcup \{ \tilde{k} : \tilde{k} \text{ irred. Komp. von } k, \text{ di } \tilde{k} = i \}$ fest (die leere Vereinigung sei die leere Korrespondenz). Offenbar ist

$$k = \bigcup_{i=0}^{n-1} \kappa_i \quad (k \neq C_{\mathbb{P}_n} ; \text{vgl. Satz 2.4.4}).$$

Sei $q_i := \text{ord } \kappa_i$ ($i = 0, \dots, n-1$), $\bar{q} := (q_0, \dots, q_{n-1})$, und sei $\kappa'_i: X \rightarrow \text{Ch}(i, q_i)$ die zu κ_i nach Satz 2.3.14 erhältliche meromorphe Abbildung mit $\kappa_i = \lambda_1 \circ \kappa'_i$, wobei $\lambda_1: \text{Ch}(i, q_i) \multimap \mathbb{P}_n$ die kanonische Korr. ist (der Fall $\kappa_i = \emptyset$, $q_i = 0$ ist problemlos mit einzuschließen).

$k': X \rightarrow \text{Ch}(-, \bar{q})$ sei die meromorphe Verbindung (Kap. 0 §3) der κ'_i , $U := X \setminus S(k')$ das Komplement der Singularitätenmenge und k die gewöhnliche Verbindung (Def. 0.0.7) der κ'_i . Man rechnet leicht nach, daß $\lambda_{\bar{q}} \circ k \subset k$ (Def. von $\lambda_{\bar{q}}$ und κ'_i) und $\lambda_{\bar{q}} \circ k' | U = k | U$ ist. Aus dem Identitätssatz 0.2.7 folgt $k \subset \lambda_{\bar{q}} \circ k'$, und da k' in k enthalten ist, $k \subset \lambda_{\bar{q}} \circ k' \subset \lambda_{\bar{q}} \circ k \subset k$, also die behauptete Gleichheit. ////

Satz 2.4.6: Zu jeder natürlichen c-holomorphen Korrespondenz $k: X \multimap \mathbb{P}_n$ gibt es eine meromorphe Abbildung $k': X \rightarrow \text{Ch}$ mit $k = \lambda \circ k'$ (Def. 2.4.3).

Beweis: Sei X_1 eine irreduzible Komponente von X , und k_1 die Vereinigung der irreduziblen Komponenten $\tilde{k}$ von k mit $\text{Voll } \tilde{k} = X_1$, betrachtet als Korrespondenz von X_1 . Da k natürlich ist, gilt $k = \bigcup_i k_i$, und die k_i sind natürlich und c -holomorph (0§2). Ist $k_1 \neq C_{\mathbb{P}_n}$, so gibt es nach Satz 2.4.5 $\bar{q} \in \mathbb{N}^n$ und

$k'_1: X_1 \rightarrow \text{Ch}(-, \bar{q})$ mit $\lambda_{\bar{q}} \circ k'_1 = k_1$; ist $k_1 = C_{\mathbb{P}_n}$, so sei $k'_1: X_1 \rightarrow \{.\}$ die konstante Abbildung.

Sei jeweils ρ_1 die Inklusionsabbildung $\text{Ch}(-, \bar{q}) \rightarrow \text{Ch}$ bzw. $\{.\} \rightarrow \text{Ch}$ mit $\lambda_{\bar{q}} = \lambda \circ \rho_1$.

Dann ist nach Lemma 0.2.3 $k' := \bigcup_i \rho_1 \circ k'_i$ eine meromorphe Abbildung, und nach Def. von λ ist $\lambda \circ k' =$

$$= \bigcup_i \lambda \circ \rho_1 \circ k'_i = \bigcup_i k_i = k. \quad \text{////}$$

Bemerkungen: 1) Die Zerlegung in Satz 2.4.4 und die Faktorisierungen in Satz 2.4.5/6 sind bei weitem nicht eindeutig. Vermutlich kann die Eindeutigkeit z.B. in Satz 2.4.5 dadurch erzwungen werden, daß man verlangt: $k(X)$

ist nicht in der Menge $M_{\bar{q}} \subset \text{Ch}(-, \bar{q})$, $M_{\bar{q}} :=$
 $= \{(\gamma_0, \dots, \gamma_{n-1}): \exists i > j: \dim(\lambda_1(\gamma_i) \cap \lambda_j(\gamma_j)) \geq j\} \cup$
 $\cup \{(\gamma_0, \dots, \gamma_{n-1}): 0 \leq i \leq n-1: \gamma_i \in \text{Ch}'(i, q_i)\}$ ist.

2) Ch ist ein unendlichdimensionaler, lokal endlichdimensionaler komplexer Raum mit kompakten Zusammenhangskomponenten. $\lambda: \text{Ch} \rightarrow \mathbb{P}_n$ ist c -holomorph (0§2). Ch ist nicht so "natürlich" definierbar wie der Raum $\text{Ch}_V :=$

$$\bigcup_{\bar{q} \in \mathbb{N}^{n+1}} \text{Ch}(0, q_0) \times \dots \times \text{Ch}(n, q_n) \quad (\text{mit zugehörigem } \lambda_V),$$

der für den Algebraiker sicher der richtigere ist, da er

auch Vielfachheiten des Gesamtraumes $\mathbb{P}_n$ ausdrückt. Als Faktorisierungsraum für natürliche Korrespondenzen ist Ch vorzuziehen, da er der kleinere ist (der kleinste, wie man sich leicht klarmacht).

3) Ch verhält sich in gewisser Weise ähnlich wie der Douady-Raum [9] (der kompakten, i.a. nichtreduzierten, komplexen Teilräume) des $\mathbb{P}_n$, ist diesem aber sicher nicht gleich (auch wenn man davon absieht, daß die Bilder von λ keine nichtreduzierte Struktur auszudrücken vermögen). Genauere Zusammenhänge sind, außer im Fall $n = 1$, noch nicht bekannt.

4) Ch_V ist dem Douady-Raum des $\mathbb{P}_n$ schon ähnlicher, und es stellt sich das Problem:

Ist Ch_V abgeschlossener Teilraum der Reduktion des Douady-Raumes des $\mathbb{P}_n$ (Retraktion?) ?

Man hätte für die Beantwortung dieser Frage viel gewonnen, wenn man wüßte, ob $\check{\lambda}_V$ platt ist [9].

5) Man kann nach dem Muster von Def. 2.3.9 Chow-Varietäten $Ch(r, q; V)$ bzgl. einer algebraischen Varietät V einführen, und analog $Ch(-, \bar{q})$, $Ch(V)$, $Ch_V(V)$, zusammen mit den entsprechenden kanonischen Korrespondenzen in V . Ist W eine weitere algebraische Varietät mit $V \subset W$, so ist $Ch(V)$ ein abgeschlossener komplexer Teilraum von $Ch(W)$.

Anwendungen auf Fortsetzungsfragen

Offenbar lassen sich mit den Ergebnissen der Kapitel 1 und 2 Fortsetzungsprobleme für natürliche c-holomorphe Korrespondenzen auf Fortsetzungen meromorpher Abbildungen zurückführen. Da bisher keine Standardtheorie für meromorphe Erweiterungen bzw. Meromorphiehüllen (für holomorphe Erweiterungen und Holomorphiehüllen vgl. [1c]) vorliegt, werde hier ein einfacher Fortsetzungsbegriff zugrundegelegt, anhand dessen man sich für allgemeinere Untersuchungen orientieren kann. Für die häufig verwendete meromorphe Komposition und Verbindung vgl. man [29] und [22].

Seien X und X' komplexe Räume. X' heißt Oberraum von X , wenn X ein offener Teilraum von X' ist, der jede irreduzible Komponente von X' trifft.

Ein Oberraum X' von X heißt meromorphe Erweiterung (bzw. meromorphe $\mathbb{C}$ -Erweiterung) von X , wenn jede meromorphe Funktion auf X (bzw. jede meromorphe Abbildung von X in $\mathbb{C}$) eine meromorphe Fortsetzung nach X' besitzt (für Definitionen vgl. [22]).

Eine natürliche c-holomorphe Korrespondenz $k: X \rightarrow Y$ heißt zugleich fortsetzbar mit den meromorphen Funktionen (bzw. mit den meromorphen Abbildungen in $\mathbb{C}$), wenn k auf jede meromorphe ($\mathbb{C}$ -)Erweiterung von X natürlich und c-holomorph fortsetzbar ist ($\tilde{k}: X' \rightarrow Y$ heißt Fortset-

zung von k , wenn $k = \tilde{k}|X$ ist).

A¹) Eine sehr allgemeine Folgerung aus Kap. 1 läßt sich so formulieren: Jede natürliche c-holomorphe Korrespondenz $k: X \rightarrow Y$ mit "fast überall" nulldimensionalen Bildern ist in jeden Oberraum X' von X (natürlich, c-holomorph) fortsetzbar, in den jede meromorphe Abbildung

$f: X \rightarrow Y^{(q)}$ ($q \in \mathbb{N}^*$) meromorph fortsetzbar ist.

Da nur wenig über meromorphe Erweiterungen bei beliebigen Bildräumen bekannt ist, wird eine derartige Aussage erst in Spezialfällen brauchbar:

a) Jede natürliche c-holomorphe Korrespondenz

$k: X \rightarrow \mathbb{C}^n$ ($n \in \mathbb{N}$) ist zugleich fortsetzbar mit den meromorphen Abbildungen in $\mathbb{C}$.

Wegen Lemma 0.3.2 kann man X irreduzibel annehmen. Aus Satz 1.2.3 folgt sodann: Es gibt $q \in \mathbb{N}$ und

$k': X \rightarrow (\mathbb{C}^n)^{(q)}$ mit $k = \lambda \circ k'$, $\lambda: (\mathbb{C}^n)^{(q)} \rightarrow \mathbb{C}^n$ c-holomorph. Aus [5] folgt die Existenz einer holomorphen

Einbettung $\varepsilon: (\mathbb{C}^n)^{(q)} \rightarrow \mathbb{C}^m$ (mit geeign. m). Sind pr_i

($i = 1, \dots, m$) die Projektionen $\mathbb{C}^m \rightarrow \mathbb{C}$, so ist jede der meromorphen Abbildungen (vgl. [29]) $pr_i \circ \varepsilon \circ k': X \rightarrow \mathbb{C}$

auf die meromorphe $\mathbb{C}$ -Erweiterung X' von X fortsetzbar zu einer meromorphen Abbildung $k'_i: X' \rightarrow \mathbb{C}$. Man prüft

leicht nach, daß die meromorphe Verbindung

$\tilde{k}' := (k'_1, \dots, k'_m)' : X' \rightarrow \mathbb{C}^m$ die meromorphe Fortsetzung

von k' nach X' induziert. $\tilde{k} := (\lambda \circ \varepsilon^{-1} \circ \tilde{k}')'$ ist die gesuchte natürliche c-holomorphe Fortsetzung von k nach

X' , wie man durch Nachprüfen auf $X \setminus S(k')$ findet.

b) Eine ähnliche Aussage gilt, wenn der Bildraum bimeromorph äquivalent zu einem abgeschlossenen komplexen Teilraum eines $\mathbb{C}^n$ ist. Sie sei für einen Spezialfall formuliert:

Sei X irreduzibel, $\beta: Y \rightarrow \mathbb{C}^n$ eine bimeromorphe Abbildung, $S(\beta^{-1})$ die Singularitätenmenge von β^{-1} .

Dann ist jede volle irreduzible Korrespondenz

$k: X \dashrightarrow Y$ mit $k(X) \not\subset \beta^{-1}(S(\beta^{-1}))$ zugleich fortsetzbar mit den meromorphen Abbildungen in $\mathbb{C}$.

$\beta_{\Delta} k := (\beta \circ k)^* : X \dashrightarrow \mathbb{C}^n$ ist nach A1a) fortsetzbar auf die meromorphe $\mathbb{C}$ -Erweiterung X' , etwa zu der natürlichen c-holomorphen Korrespondenz $k_1: X' \dashrightarrow \mathbb{C}^n$. Dann ist

$\tilde{k} := \beta^{-1}_{\Delta} k_1$ die natürliche c-holomorphe Fortsetzung von k ; denn $k = \beta^{-1}_{\Delta} \beta_{\Delta} k \subset \beta^{-1}_{\Delta} (\beta_{\Delta} k) = \beta^{-1}_{\Delta} k_1|_X = \tilde{k}|_X$ und mit $\Sigma := k^{-1} \beta^{-1}(S(\beta^{-1}))$ $\tilde{k}|_{X \setminus \Sigma} \subset \beta^{-1} \circ \beta \circ k|_{X \setminus \Sigma} = k|_{X \setminus \Sigma}$, also $\tilde{k}|_X \subset k$, weil $\tilde{k}$ natürlich ist, daher $\tilde{k}|_X = k$. (Σ ist eine dünne analytische Menge, wie man aus den Voraussetzungen unter Benutzung von $\text{dib } k = 0$ leicht folgern kann.) (Für $\beta^{-1}_{\Delta} \beta_{\Delta} k$ vgl. [29] S.58, Satz 1.)

A2) Eine der allgemeinsten Aussagen, die man aus den Ergebnissen von Kapitel 2 nach der in Bemerkung 5 zu Satz 2.4.6 angedeuteten Verallgemeinerung ableiten wird können, dürfte folgendermaßen lauten:

Jede natürliche c-holomorphe Korrespondenz in eine alge-

braische Varietät ist zugleich mit den meromorphen Funktionen fortsetzbar.

Um diese Aussage für einige Spezialfälle beweisen zu können, braucht man folgendes

Lemma: Ist V eine algebraische Varietät, so ist jede meromorphe Abbildung $\mu: X \rightarrow V$ zugleich mit den meromorphen Funktionen fortsetzbar.

Beweis: Man denke sich V eingebettet in einen projektiven Raum.

Auf diese Weise ist die Aussage zurückzuführen auf den Fall $V = \mathbb{P}_n$ und kann nun durch Induktion über n bewiesen werden.

Sei zunächst X irreduzibel. Die Fälle $n = 0, 1$ sind trivial. Sei also $n \geq 2$:

Sind $\pi_1: \mathbb{P}_n \rightarrow \mathbb{P}$ die "meromorphen Projektionen", die von den Abbildungen $(x_0, \dots, x_n) \mapsto (x_0, x_1)$ herrühren, so ist entweder die meromorphe Komposition $\pi_1 \Delta \mu$ definiert und $\mu^{-1}(S(\pi_1))$ dünn in X für alle $i = 1, \dots, n$, oder für ein i ist $\mu(X) \subset S(\pi_i)$ (X irreduzibel!). Im letzteren Fall ist wegen $S(\pi_i) \cong \mathbb{P}_{n-2}$ die Induktionsvoraussetzung anwendbar.

Im ersteren Fall sind die meromorphen Abbildungen $\pi_i \Delta \mu: X \rightarrow \mathbb{P}$ definiert und auf die meromorphe Erweiterung X' von X fortsetzbar zu $\mu_i: X' \rightarrow \mathbb{P}$ ($i=1, \dots, n$). Ist $\tilde{\mu}_0 := (\mu_1, \dots, \mu_n)^*$ deren meromorphe Verbindung, und ist $\sigma: \mathbb{P}^n \rightarrow \mathbb{P}_n$ die Segre-Abbildung (σ^{-1} ist die meromor-

phe Verbindung $(\pi_1, \dots, \pi_n)^*$, so ist $\tilde{\mu} := \sigma \circ \tilde{\mu}_0 = \sigma \Delta \tilde{\mu}_0$ (vgl. [29]) die gesuchte meromorphe Fortsetzung von μ nach X' , was außerhalb der dünnen analytischen Menge $S(\mu) \cup \mu^{-1}(S(\pi_1) \cup \dots \cup S(\pi_n))$ punktweise nachgeprüft werden kann, und dann aufgrund des Identitätssatzes für meromorphe Abbildungen auf ganz X gilt.

Damit ist das Lemma für irreduzible X bewiesen. Der allgemeine Fall folgt nun aus Lemma 0.3.2. //

a) Jede natürliche c-holomorphe Korrespondenz

$k: X \dashrightarrow \mathbb{P}_n$ ist zugleich fortsetzbar mit den meromorphen Funktionen.

Mit den Bezeichnungen von Satz 2.4.5 sei $V := \text{Ch}(-, \bar{q})$, $k': X \rightarrow V$, $\lambda := \lambda_{\bar{q}}: V \dashrightarrow \mathbb{P}_n$ mit $k = \lambda \circ k'$ (diese Stücke existieren nach Satz 2.4.5 für irreduzibles X , was nach einem Argument analog Lemma 0.3.2 keine Einschränkung bedeutet). Ist X' meromorphe Erweiterung von X , so ist nach obigem Lemma k' meromorph fortsetzbar zu

$\tilde{k}': X' \rightarrow V$. $\tilde{k} := (\lambda \circ \tilde{k}')^*$ ist die gesuchte natürliche c-holomorphe Fortsetzung von k ; denn $\tilde{k}|_X = (\lambda \circ \tilde{k}')^*|_X = (\lambda \circ \tilde{k}'|_X)^* = (\lambda \circ k')^* = k = k$.

b) Sei X irreduzibel und Y bimeromorph äquivalent zu einer algebraischen Varietät $V \subset \mathbb{P}_n$ vermöge der bimeromorphen Abbildung $\beta: Y \rightarrow V$.

Dann ist jede volle irreduzible c-holomorphe Korrespondenz $k: X \dashrightarrow Y$ mit $k(X) \not\subset \beta^{-1}(S(\beta^{-1}))$ zugleich fort-

setzbar mit den meromorphen Funktionen.

Ist nämlich X' eine meromorphe Erweiterung von X , so kann man vermöge A2a) die natürliche Fortsetzung k_1 :

$X' \rightarrow V$ der natürlichen c-h. Korrespondenz βk finden. Sei $\Sigma := \beta^{-1}(S(\beta^{-1}))$, und $\tilde{k}: X' \rightarrow Y$ aus $\beta^{-1}\Delta k_1$ entstanden durch Fortlassen der in $X' \times \Sigma$ enthaltenen irreduziblen Komponenten.

$\tilde{k}$ ist offenbar natürlich und c-holomorph. Daß $\tilde{k}$ Fortsetzung von k ist, findet man so: $\tilde{k} \subset \beta^{-1}\Delta k_1 \subset \beta^{-1} \circ k_1 \Rightarrow \tilde{k}|X \subset \beta^{-1} \circ (\beta \Delta k) \subset \beta^{-1} \circ \beta \circ k \Rightarrow G\tilde{k} \cap (X \times Y) \subset G(\beta^{-1} \circ \beta \circ k) \subset Gk \cup (X \times \Sigma)$, also, da nach Def. von $\tilde{k}$ keine irreduzible Komponente von $G(\tilde{k}|X)$ in $X \times \Sigma$ liegen kann, folgt $\tilde{k}|X \subset k$.

Andrerseits folgt aus $k = \beta^{-1}\Delta \beta \Delta k \subset \beta^{-1}\Delta(\beta \Delta k) \subset \beta^{-1}\Delta k_1|X$ daß $Gk \subset G(\beta^{-1}\Delta k_1) \cap (X \times Y) \subset G(\tilde{k}|X) \cup (X \times \Sigma)$, also, weil Gk irreduzibel und nicht in $X \times \Sigma$ enthalten ist, $k \subset \tilde{k}|X$. Vgl. [29] S.58, Satz 1.

L I T E R A T U R

- [1] BEHNKE, H. - P. THULLEN: Theorie der Funktionen mehrerer komplexer Veränderlichen. Zweite, erweiterte Auflage, Hrsg. R. REMMERT. Benutzte Anhänge:
 - a) H. HOLMANN: Konstruktion und Theorie der komplexen Räume. 37 - 48.
 - b) W. KAUP: Abbildungstheorie. 175 - 196.
 - c) O. FORSTER: Holomorphiegebiete. 134 - 147.
- [2] BOURBAKI, N.: Topologie générale. Paris 1971.
- [3] BRINCKMANN, H. B. - D. PUPPE: Kategorien und Funktoren. Lecture Notes in Math., 25, Berlin 1966.
- [4] —: Abelsche und exakte Kategorien, Korrespondenzen. Lecture Notes in Math., 96, Berlin 1969.
- [5] CARTAN, H.: Quotient d'un espace analytique par un groupe d'automorphismes. Algebraic Geometry and Topology, Symp. LEFSCHETZ, 90 - 102, Princeton 1957.
- [6] —: Quotients of Complex Analytic Spaces. Contributions to Function Theory, 1 - 15, Tata Inst., Bombay 1960.
- [7] CHOW, WEI-LIANG: On Compact Analytic Varieties. Am. J. of Math. 71, 893 - 914 (1949).
- [8] DIEROLF, P.: Korrespondenzen und ihre topologischen Eigenschaften. Überblicke Math. 6, 51 - 112 (1973).
- [9] DOUADY, A.: Le problème des modules pour les sous-espaces analytiques compacts d'un espace analytique donné. Ann. Inst. Fourier (Grenoble) 16, 1, 1 - 98 (1966).

- [10] FISCHER, G.: Ein relativer Satz von CHOW und die Elimination der Unbestimmtheitsstellen meromorpher Funktionen. Ersch. demnächst in den Math. Annalen.
- [11] GRAUERT, H. u. R. REMMERT: Zur Theorie der Modifikationen. I. Math. Ann. 129, 274 - 296 (1955).
- [12] HÖSS, D.: Fortsetzung holomorpher Korrespondenzen in den pseudokonkaven Rand. Diss. München 1970.
- [13] KERNER, H.: Komplexe Analysis. Vorlesung Univ. München 1969/70.
- [14] KRAUS, G.: Korrespondenzen und meromorphe Abbildungen. Diss. München 1970.
- [15] —: Holomorphe Korrespondenzen und meromorphe Abbildungen allgemeiner komplexer Räume, Fortsetzungssätze. Manuscripta math. 6, 1 - 15 (1972).
- [16] MALGRANGE, B.: Analytic Spaces. Ens. Math. 17, 1 - 28 (1968).
- [17] MICHAEL, E.: Topologies on Spaces of Subsets. Trans. Am. Math. Soc. 71, 1, 152 - 182 (1951).
- [18] NARASIMHAN, R.: Introduction to the Theory of Analytic Spaces. Lecture Notes in Math. 25, Berlin 1966.
- [19] REMMERT, R.: Holomorphe und meromorphe Abbildungen komplexer Räume. Math. Ann. 133, 328 - 370 (1957).
- [20] — u. K. STEIN: Über die wesentlichen Singularitäten analytischer Mengen. Math. Ann. 130, 410 - 441 (1956).
- [21] —, —: Eigentliche holomorphe Abbildungen. Math. Z. 73, 159 - 189 (1960).

- [22] STEIN, K.: Maximale holomorphe und meromorphe Abbildungen. II. Am.J.Math. 86, 823 - 868 (1964).
- [23] —: Meromorphic Mappings. Ens.Math. 17, 29 - 46 (1968)
- [24] —: Fortsetzung holomorpher Korrespondenzen. Invent.math. 6, 78 - 90 (1968).
- [25] Topics on holomorphic correspondences. Rocky Mts.J. of Math. 2, 443 - 463 (1972).
- [26] WAERDEN, B.L. van der: Moderne Algebra II, Berlin 1967.
- [27] —: Einführung in die algebraische Geometrie. " 1939.
- [28] WHITNEY, H.: Complex Analytic Varieties. Reading, Mass. 1972.
- [29] WOLFFHARDT, K.: Existenzbedingungen für maximale holomorphe und meromorphe Abbildungen. Diss. München 1963.

Lebenslauf

Am 20. 8. 1944 bin ich in Passau als erstes der zwei Kinder des Lebensmittelkaufmanns Hans Sinzinger und seiner Frau Hilda, geb. Egger, zur Welt gekommen.

Ich besuchte 1950 - 55 die Volksschule und 1955 - 64 die Oberrealschule in Passau.

Nach dem Abitur schrieb ich mich an der Universität München im Wintersemester 64/65 für Chemie ein, wechselte aber schon im darauffolgenden Semester zum Fach Mathematik über.

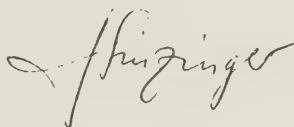
Nach dem Vordiplom folgte ich einer Einladung zu einem Sommeraufenthalt im Europäischen Kernforschungszentrum (CERN) in Genf und studierte daraufhin ein Jahr in Paris (1967/68).

Danach setzte ich das Studium der Mathematik in München fort und schloß es im Januar 1972 mit dem Diplom ab.

Ich hörte u.a. Vorlesungen bei K. Stein, Rieger, Hämmerlin, Kerner, L.Schwartz, Godement, Richter, Pareigis, Schütte, Jörgens, G.Fischer, Weidmann, Wolffhardt und Roelcke (Mathematik), Faessler, F.Bopp, Sizmann, Schlüter und Salecker (Physik), Wiberg und Huisgen (Chemie).

Seither promoviere ich am Mathematischen Institut der Universität München bei Prof. Dr. K. Stein.

München, den 16. 7. 1975



Dissertationsdruck
GmbH & Co. KG.

Schadel & Wehle

8 München 40 Amalienstr. 81 Telefon 089/288 784/2. Etage